微積分解法２０１６　中間試験（６月１７日（金））

20 問１ 次の極限値をもとめなさい。

$$(1)\quad \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(n+2)}{(n+3)(n+4)(n+5)},\qquad (2)\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}).$$

20 問２ 次の極限値をもとめなさい。

$$(1)\quad \lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1},\qquad (2)\quad \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{(x+1)(x+5)}-\sqrt{(x-1)(x-5)}\right).$$

20 問３ 次の関数 $f(x)$ が点 $x=0$ で不連続であることを示しなさい。

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x-|x|}{x} & (x\neq 0),\\ 2 & (x=0).\end{cases}$$

20 問４ 関数 $f(x), g(x)$ を次で定義する。

$$f(x)=\mathrm{Arcsin}x+\sqrt{1-x^2},\qquad g(x)=\log(\log x).$$

（１）関数 $f(x), g(x)$ の導関数 $f'(x), g'(x)$ を求めなさい。

（２）関数 $f(x), g(x)$ の２次導関数 $f''(x), g''(x)$ を求めなさい。

20 問５ 関数 $f(x)=e^x$, $g(x)=\sinh(x^3)$ について以下の問いに答えなさい。
ただし、$\cosh x=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$, $\sinh x=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$ とする.

（１）関数 $f(x)$ の n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ を求めなさい。ただし、$n=1,2,3,\cdots$.

（２）関数 $f(x)$ のマクローリン展開を求めなさい。

（３）関数 $g(x)$ のマクローリン展開を求めなさい。

(解答例)

問1.

(1) $$\frac{n(n+1)(n+2)}{(n+3)(n+4)(n+5)} = \frac{1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)}{\left(1+\frac{3}{n}\right)\left(1+\frac{4}{n}\right)\left(1+\frac{5}{n}\right)}$$

$$\longrightarrow \underline{\ 1\ } \quad (n\to\infty)$$

(2) $$\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$= \frac{\sqrt{n}\,(n+1-n)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} \longrightarrow \underline{\frac{1}{2}} \quad (n\to\infty)$$

問2.

(1) $$\frac{x^3-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = x^2+x+1$$

$$\longrightarrow \underline{\ 3\ } \quad (x\to 1)$$

(2) $$\sqrt{(x+1)(x+5)}-\sqrt{(x-1)(x-5)}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{(x+1)(x+5)}-\sqrt{(x-1)(x-5)}\right)\left(\sqrt{(x+1)(x+5)}+\sqrt{(x-1)(x-5)}\right)}{\sqrt{(x+1)(x+5)}+\sqrt{(x-1)(x-5)}}$$

$$= \frac{(x+1)(x+5)-(x-1)(x-5)}{\sqrt{(x+1)(x+5)}+\sqrt{(x-1)(x-5)}}$$

$$= \frac{12x}{\sqrt{(x+1)(x+5)}+\sqrt{(x-1)(x-5)}}$$

$$= \frac{12}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{5}{x}\right)}+\sqrt{\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{5}{x}\right)}} \longrightarrow \frac{12}{2}=6 \quad (x\to\infty)$$

問3.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{x-|x|}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{x-x}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 0 = 0$$

$\neq$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{x-|x|}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{x-(-x)}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} 2 = 2$$

よって極限 $\lim_{x\to 0} f(x)$ は存在しない。

よって $f(x)$ は $x=0$ で不連続

問4.

(1) $f(x) = \mathrm{Arcsin}\, x + \sqrt{1-x^2}$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} = \underline{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$$

$g(x) = \log(\log x)$

$$g'(x) = \underline{\frac{1}{\log x} \times \frac{1}{x}}$$

(2)

$$f''(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\ \frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}$$

$$= -\frac{1}{(1+x)^2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \underline{-\frac{1}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}}$$

$$g''(x) = \frac{-1}{(\log x)^2}\frac{1}{x} \times \frac{1}{x} + \frac{1}{\log x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \underline{-\frac{(1+\log x)}{x^2(\log x)^2}}$$

問5、

(1)
$$f(x)=e^x$$
$$f'(x)=e^x$$
$$f''(x)=e^x$$
$$\vdots$$
$$\underline{f^{(n)}(x)=e^x}$$

(2)
$$f^{(n)}(0)=1$$
よって
$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$
$$\underline{=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n}$$

(3) (2)を用いる.
$$g(x)=\cosh(x^3)$$
$$=\frac{1}{2}(e^{x^3}+e^{-x^3})$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{3n}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^{3n}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m)!}x^{6m}+\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)!}x^{6m+3}$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m)!}x^{6m}-\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)!}x^{6m+3}$$
$$\underline{=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m)!}x^{6m}}$$