数学 I 期末試験

（平成２８年７月２５日，機械システム１２６名，応用生命・情報１４２名）

30

問１ 次の累次積分の積分順序を交換しなさい．ただし，$f(x,y)$ は連続関数とする．

$$(1)\quad \int_0^2 \left(\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2}} f(x,y)dx \right) dy, \qquad (2)\quad \int_1^e \left(\int_0^{\log x} f(x,y)dy \right) dx.$$

15 15

20

問２ 次の重積分の値を求めなさい．ただし，積分領域は $D = \{(x,y) | 0 \le y \le 2, \frac{y}{2} \le x \le 1\}$ とする．

$$\int\int_D \cos(x^2) dxdy.$$

ヒント：積分の順序交換．

25

問３ (1) 極座標変換 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$ のヤコビアン $J(r,\theta)$ の値を求めなさい． 10

(2) 次の重積分の値を求めなさい．積分領域は $D = \{(x,y) | x^2 + y^2 \le 4, x, y \ge 0\}$ とする．

$$\int\int_D \frac{x \cdot y^n}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy.$$

ただし，$n = 0, 1, 2, 3, \cdots$ とする． 15

25

問４ (1) 変数変換 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(1-v) \\ uv(1-w) \\ uvw \end{pmatrix}$ のヤコビアン $J(u,v,w)$ の値を求めなさい． 10

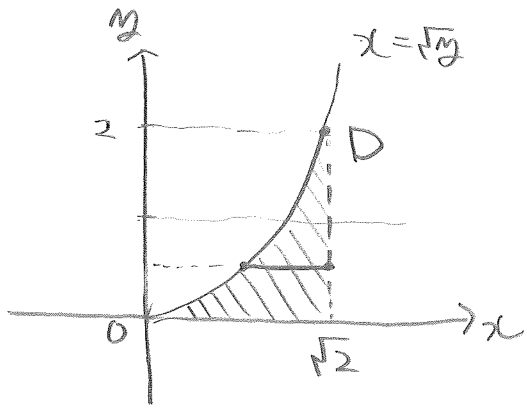
(2) 次の重積分の値を求めなさい．積分領域は $D = \{(x,y,z) | x+y+z \le 1, x, y, z \ge 0\}$ とする．

$$\int\int\int_D z^n dxdydz.$$

ただし，$n = 0, 1, 2, 3, \cdots$ とする． 15

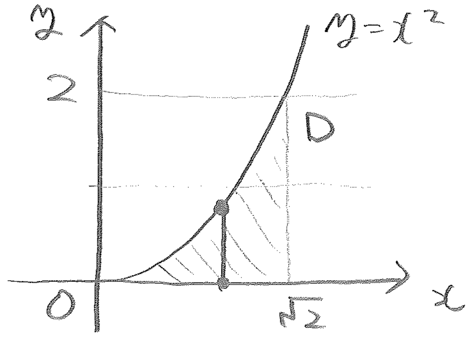
問1.

(1) 積分領域は、



$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 2,\ \sqrt{y} \leq x \leq \sqrt{2}\}$$

x と y の立場を入れかえると、



$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq \sqrt{2},\ 0 \leq y \leq x^2\}$$

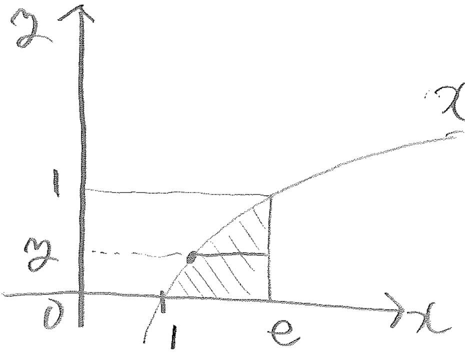
よって

$$\int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_0^{x^2} f(x, y)\, dy \right) dx$$

(2) 積分領域は、

$$D = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq e,\ 0 \leq y \leq \log x\}$$

x と y の立場を入れかえると、



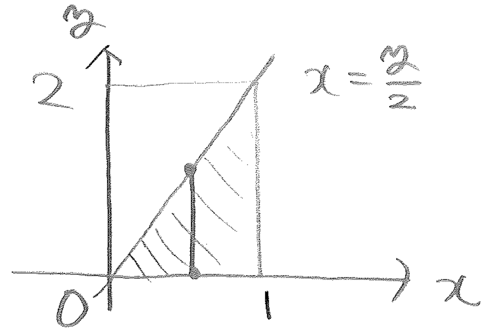
$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1,\ e^y \leq x \leq e\}$$

よって

$$\int_0^1 \left(\int_{e^y}^{e} f(x, y)\, dx \right) dy$$

問2.

$D = \{(x,y) \mid 0 \leq y \leq 2,\ \frac{y}{2} \leq x \leq 1\}$



xとyの立場を入れかえると.

$D = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 2x\}$

よって $\iint_D \cos(x^2)\,dx\,dy$

$= \int_0^1 \left(\int_0^{2x} \cos(x^2)\,dy \right) dx$

$= \int_0^1 \cos(x^2) \left[y \right]_{y=0}^{y=2x} dx$

$= \int_0^1 2x \cos(x^2)\,dx$

$= \left[\sin(x^2) \right]_{x=0}^{x=1}$

$= \underline{\sin(1)}$

問3.

(1) $J(r,\theta)=\begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=\underline{r}$

(2) 変数変換公式により,

$$I=\iint_D \frac{xy^n}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy$$

$$=\iint_{D'} \frac{r\cos\theta\,(r\sin\theta)^n}{r}\,r\,drd\theta$$

ただし,

$$D'=\{(r,\theta)\mid 0\le r\le 2,\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\}$$

$$I=\iint_{D'} r^{n+1}\times\cos\theta\cdot\sin^n\theta\,drd\theta$$

$$=\int_0^2 r^{n+1}dr\times\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\times\sin^n\theta\,d\theta$$

$$=\left[\frac{1}{n+2}r^{n+2}\right]_{r=0}^{r=2}\left[\frac{1}{n+1}\sin^{n+1}\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{n+2}2^{n+2}\,\frac{1}{n+1}=\underline{\frac{2^{n+2}}{(n+2)(n+1)}}$$

問4

(1)

$$J(u,v,w)=\begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} (1-v) & -u & 0 \\ v(1-w) & u(1-w) & -u\cdot v \\ vw & uw & u\cdot v \end{vmatrix}$$

$$=u^2v\begin{vmatrix} (1-v) & -1 & 0 \\ v(1-w) & (1-w) & -1 \\ vw & w & 1 \end{vmatrix}$$

$$=u^2v\left\{(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1-v & -1 \\ v(1-w) & (1-w) \end{vmatrix}\right.$$

$$\left.+(-1)^{2+3}\times(-1)\begin{vmatrix} 1-v & -1 \\ vw & w \end{vmatrix}\right\}$$

$$=u^2v\{(1-v)(1-w)+v(1-w)+(1-v)w+vw\}$$

$$=u^2v\{1\cancel{-v}\cancel{-w}\cancel{+vw}\cancel{+v}\cancel{-vw}\cancel{+w}\cancel{-vw}\cancel{+vw}\}$$

$$=\underline{u^2v}$$

(2) $\Phi(u,v,w)=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とかく.

$$D=\{(x,y,z)\mid x+y+z\leq 1,\ x,y,z\geq 0\}$$

$$=\{(x,y,z)\mid 0\leq u=x+y+z\leq 1,\ 0\leq u(1-v)=x,$$
$$0\leq uv(1-w)=y,\ 0\leq uvw=z\}$$

$$=\{(x,y,z)\mid 0\leq u\leq 1,\ 0\leq v\leq 1,\ 0\leq w\leq 1\}$$

$$=\{\Phi(u,v,w)\mid 0\leq u,v,w\leq 1\}$$

$D' = \{(u, v, w) \mid 0 \leq u, v, w \leq 1\}$ とおくと、

$D = \Phi(D')$

Φ は 1対1、D' の内部で C^1 級、

D' 〃 ヤコビアン $J(u, v, w) \neq 0$。

よって変数変換公式により、

$$I = \iiint_D x y^2 z^3 \, dx dy dz$$

$$= \iiint_{D'} (uvw)^n \, |J(u, v, w)| \, du dv dw$$

$$= \iiint_{D'} u^{n+2} v^{n+1} w^n \, du dv dw$$

$$= \int_0^1 u^{n+2} du \int_0^1 v^{n+1} dv \int_0^1 w^n dw$$

$$= \left[\frac{1}{n+3} u^{n+3}\right]_0^1 \left[\frac{1}{n+2} v^{n+1}\right]_0^1 \left[\frac{1}{n+1} w^{n+1}\right]_0^1$$

$$= \underline{\frac{1}{(n+3)(n+2)(n+1)}}$$