数学Ｉ中間試験（平成２８年６月２３日、応用生命・情報、１４２名）

24

問１ 次の関数 $f(x,y), g(x,y)$ の２次までの偏導関数 $f_x, f_y, f_{x,x}, f_{x,y}, f_{y,x}, f_{y,y}, g_x, g_y, g_{x,x}, g_{x,y}, g_{y,x}, g_{y,y}$ を求めなさい。

$$f(x,y) = \frac{x-3y}{2x+y}, \quad g(x,y) = \sin(x^2y^3).$$

16

問２ 次の曲面上の点 P における接平面を求めよ。

$$z = f(x,y) = xy, \quad \mathrm{P}(1,2,f(1,2)).$$

30

問３ 関数 $f(x,y)$ は C^2 級とする。合成関数 $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ について以下の問いに答えなさい。

(1) １次偏導関数 $\frac{\partial g}{\partial r}, \frac{\partial g}{\partial \theta}$ を求めなさい。

(2) ２次偏導関数 $\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}, \frac{\partial^2 g}{\partial r \partial \theta}$ を求めなさい。

問４ 次の関数 $z = f(x,y)$ について以下の問いに答えなさい。

20

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy.$$

（１）臨界点 $f_x = f_y = 0$ を全て求めなさい。（ヒント：２点）

（２）（１）で求めた臨界点は、極大、極小、鞍点のいずれか調べなさい。

10

問５ 次の関数 $f(x,y)$ が原点 $(0,0)$ で連続でないことを示せ。

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

（解答）

問1. ・ $f(x,y) = \dfrac{x-3y}{2x+y}$

$$
\begin{cases}
f_x = \dfrac{7y}{(2x+y)^2} \\
f_y = \dfrac{-7x}{(2x+y)^2} \\
f_{x,x} = \dfrac{-28y}{(2x+y)^3} \\
f_{y,y} = \dfrac{14x}{(2x+y)^3} \\
f_{x,y} = f_{y,x} = \dfrac{14x-7y}{(2x+y)^3}
\end{cases}
$$

・ $g(x,y) = \sin(x^2y^3)$.

$$
\begin{cases}
g_x = 2xy^3\cos(x^2y^3) \\
g_y = 3x^2y^2\cos(x^2y^3) \\
g_{xx} = 2y^3\cos(x^2y^3) - 4x^2y^6\sin(x^2y^3) \\
g_{yy} = 6x^2y\cos(x^2y^3) - 9x^4y^4\sin(x^2y^3) \\
g_{xy} = g_{yx} = 6xy^2\cos(x^2y^3) - 6x^3y^5\sin(x^2y^3)
\end{cases}
$$

問2.

$f_x = y,\ f_y = x,$

$f_x(1,2) = 2,\ f_y(1,2) = 1,\ f(1,2) = 2$

よって、

$z - f(1,2) = f_x(1,2)(x-1) + f_y(1,2)(y-2)$

つまり、 $\underline{z = 2x+y-2}$

問3.

$$g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

(1) $$\frac{\partial g}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta$$

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}(-r\sin\theta) + \frac{\partial f}{\partial y} r\cos\theta$$

(2) $$\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} = \cos\theta\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cos\theta + \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\sin\theta\right)$$

$$+\sin\theta\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\cos\theta + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\sin\theta\right)$$

$$= \cos^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + \sin^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial r\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}(-\sin\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\theta$$

$$-r\sin\theta\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cos\theta + \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\sin\theta\right)$$

$$+r\cos\theta\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\cos\theta + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\sin\theta\right)$$

$$= -\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x} + \cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$-r\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + r\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$+r\cos 2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$$

問4.

(1) $f_x = 3x^2 - 3y$ …①

$f_y = 3y^2 - 3x$ …②

①−②は、

$3(x-y)(x+y+1) = 0$

よって $x = y$ or $x+y+1=0$

(i) $x+y+1=0$ のとき、①は、

$3x^2+3x+3 = 0$

判別式 $D = 9 - 4\cdot3\cdot3 = -27 < 0$

実根なし、

(ii) $x=y$ のとき、①, ②は、

$3x(x-1) = 0$

つまり $x = 0, 1$

実際 $(0,0), (1,1)$ は①, ②をみたす.

(2) $f_{xx} = 6x$

$f_{yy} = 6y$, $f_{xy} = f_{yx} = -3$

ヘシアンは、$H(0,0) = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -9 < 0$

$H(1,1) = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 36 - 9 = 27 > 0$

よって極値判定定理により、

点$(0,0)$で $H(0,0) = -9 < 0$ であるから あん点

点$(1,1)$で $H(1,1) = 27 > 0$ かつ $f_{xx}(1,1) = 6 > 0$

であるから極小

問5.

$y=x^2$ とすると、$f(x,y)=\frac{x^2\cdot x^2}{x^4+x^4}=\frac{1}{2}$

よって $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x^2}} f(x,y)=\frac{1}{2}\neq 0=f(0,0)$.

よって $f(x,y)$ は原点 $(0,0)$ で連続ではない.