# 数学 I 中間試験（平成２８年６月２３日、機械、１２６名）

24

**問１** 次の関数 $f(x,y)$, $g(x,y)$ の２次までの偏導関数 $f_x, f_y$, $f_{x,x}, f_{x,y}, f_{y,x}, f_{y,y}$ および $g_x, g_y$, $g_{x,x}, g_{x,y}, g_{y,x}, g_{y,y}$ を求めなさい。

$$f(x,y) = x^4 - 4xy^2 + y^3, \quad g(x,y) = \log(x^2 + y^2).$$

16

**問２** 次の曲面上の点 P における接平面を求めよ。

$$z = f(x,y) = \sqrt{1 - x^2}, \quad \mathrm{P}(0, 0, f(0,0)).$$

30

**問３** 関数 $f(x,y)$ は $C^2$ 級とする。合成関数 $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ について以下の問いに答えなさい。

(1) １次偏導関数 $\frac{\partial g}{\partial r}, \frac{\partial g}{\partial \theta}$ を求めなさい。 10+10

(2) ２次偏導関数 $\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}, \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$ を求めなさい。 5+5

**問４** 次の関数 $z = f(x,y)$ について以下の問いに答えなさい。

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - x^2 + xy - y^2.$$

20

（１）臨界点 $f_x = f_y = 0$ を全て求めなさい。（ヒント：２点） 5+5

（２）（１）で求めた臨界点は、極大、極小、鞍点のいずれなのか調べなさい。

5+5

**問５** 次の関数 $f(x,y)$ が原点 $(0,0)$ で連続かどうかを調べなさい。

10

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

（解答）

問1. $f(x,y)=x^4-4xy^2+y^3$

$$\begin{cases} f_x = 4x^3-4y^2 \\ f_y = -8xy+3y^2 \\ f_{x,x}=12x^2 \\ f_{y,y} = -8x+6y \\ f_{xy} = f_{yx} = -8y \end{cases}$$

$g(x,y)=\log(x^2+y^2)$

$$\begin{cases} g_x = \dfrac{2x}{x^2+y^2} \\ g_y = \dfrac{2y}{x^2+y^2} \\ g_{xx} = \dfrac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} \\ g_{yy} = \dfrac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} \\ g_{xy} = g_{yx} = \dfrac{-4xy}{(x^2+y^2)^2} \end{cases}$$

問2. $f_x = \dfrac{1}{2}\dfrac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} = -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$f_y = 0$

$f(0,0)=1$ なので、

$z-f(0,0)=f_x(0,0)(x-0)+f_y(0,0)(y-0)$

よって $\underline{z-1=0}$

問3.　②

$$g(r,\theta)=f(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

(1) $$\frac{\partial g}{\partial r}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta$$

$$\frac{\partial g}{\partial \theta}=\frac{\partial f}{\partial x}(-r\sin\theta)+\frac{\partial f}{\partial y}r\cos\theta$$

(2) $$\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}=\cos\theta\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cos\theta+\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\sin\theta\right)+\sin\theta\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\cos\theta+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\sin\theta\right)$$

$$=\cos^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\sin^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}=-r\sin\theta\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-r\sin\theta)+\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}r\cos\theta\right)+r\cos\theta\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(-r\sin\theta)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}r\cos\theta\right)$$

$$-r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}-r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$=r^2\sin^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+r^2\cos^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$-2r^2\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}-r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}-r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y},$$

問4 (1)

$$f_x = 3x^2 - 2x + y = 0 \quad \cdots ①$$
$$f_y = 3y^2 - 2y + x = 0 \quad \cdots ②$$

①−②は,

$$3(x-y)\{(x+y)-1\} = 0$$

よって　$x = y$ or $x + y = 1$

(i) $x + y = 1$ のとき, ①は,

$$3x^2 - 3x + 1 = 0$$

判別式 $D = 9 - 4 \cdot 3 = -3 < 0$

実根なし

(ii) $x = y$ のとき, ①,②は,

$$3x\left(x - \frac{1}{3}\right) = 0$$

つまり $x = 0, \frac{1}{3}$

実際, $\underline{(0,0), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)}$ は①,②をみたす。

(2)

$$f_{xx} = 6x - 2$$
$$f_{yy} = 6y - 2$$
$$f_{xy} = f_{yx} = 1$$

ヘシアンは, $H(0,0) = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0$

$$H\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0$$

よって極値判定定理により,

$\underline{点(0,0)で}$ $H(0,0) = 3 > 0$ かつ $f_{xx}(0,0) = -2 < 0$

であるから, $\underline{極大}$

$\underline{点\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)で}$ $H\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = -1 < 0$ であるから $\underline{あん点}$

問5.

極座標

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$$ と考える.

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{2r^2\cos\theta\sin\theta}{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)} = \sin 2\theta$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ y=\tan\theta\cdot x}} f(x,y) = \sin 2\theta$$

極限のとり方によって値が異なる.

よって

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ は存在しない.

つまり $f(x,y)$ は $(0,0)$ で連続ではない.