確率統計学２０１５　期末試験 (機械システム、１２６名)

平成２８年２月５日、自筆ノート、積分数値表、関数電卓持ち込み可

30

問１　（１）母集団から大きさ１７の標本を取り出したところ、以下のようになった。標本平均 $\bar{x}$ 10 と標本分散 s^2 10 を求めなさい。

0.17, 0.23, 0.21, 0.20, 0.23, 0.21, 0.19, 0.15, 0.14, 0.22, 0.18, 0.20, 0.28, 0.18, 0.22, 0.16, 0.23.

（２）母集団から大きさ１７の標本を取り出す操作を多数回行ったところ、標本平均の期待値は 0.20、標本平均の分散は 0.000080 であった。母平均 μ 5、母分散 σ^2 5 はいくつと考えられるか。

10

問２　自由度 n の χ^2 分布の確率密度 $T_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ は次の式で与えられる。

$$T_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$

（１）$\int_{-\infty}^{\infty} T_n(x)dx = 1$ を示しなさい。 5

（２）自由度 n の χ^2 分布の期待値は n であることを示しなさい。 5

20

問３　正規母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ の母標準偏差は $\sigma = 0.10$ とする。この正規母集団から大きさ $n = 25$ の標本を取り出したところ、標本平均は $\bar{x} = 1.24$ であった。

（１）母平均 μ に対する信頼度 95 %の信頼区間を求めなさい。 10

（２）母平均 μ に対する信頼度 99 %の信頼区間を求めなさい。 10

20

問４　正規母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ から大きさ $n = 10$ の標本を取り出したところ、標本平均は $\bar{x} = 60$、標本分散は $s^2 = 13.8$ であった。

（１）母分散 σ^2 に対する信頼度 95 %の信頼区間を求めなさい。 10

（２）母分散 σ^2 に対する信頼度 99 %の信頼区間を求めなさい。 10

裏面に続く

問5 20 正規母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ から大きさ $n = 5$ の標本を取り出したところ以下のようになった。

$$144, 147, 146, 142, 144.$$

（1）標本平均 $\bar{x}$, 標本分散 s^2 を求めなさい。 10

（2）母平均 μ に対する信頼度 99 %の信頼区間を求めなさい。 10

確率統計 2015

問1.

(1) $\bar{x} = \frac{1}{17}(0.17+0.23+0.21+0.20+0.23+0.21+0.19$
$+0.15+0.14+0.22+0.18+0.20+0.28+0.18$
$+0.22+0.16+0.23)$

$= 0.20$

$s^2 = \frac{1}{17}\{(0.17-0.20)^2+(0.23-0.20)^2+(0.20-0.20)^2+\cdots\}$

$= \frac{49}{42500} \fallingdotseq 0.00115$

(2) 標本の大きさが $n=17$ なので、

標本平均の期待値 = 母平均
標本平均の分散 = $\frac{1}{n}$ 母分散 により、

$\mu = 0.20$
$\sigma^2 = 17 \times 0.000080 = 0.00136$

問2.

(1) $\int_{-\infty}^{\infty} T_n(x)\,dx$

$$= \int_0^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}\,dx$$

変数変換 $y = \frac{x}{2}$ で、

$$与式 = \int_0^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} (2y)^{\frac{n}{2}-1} e^{-y}\,2dy$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^{\infty} y^{\frac{n}{2}-1} e^{-y}\,dy = \Gamma(\tfrac{n}{2})/\Gamma(\tfrac{n}{2}) = 1$$

(2) $$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x \, T_n(x) \, dx$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}} \, e^{-\frac{x}{2}} dx$$

$y = \frac{x}{2}$ と変数変換

$$与式 = \int_0^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} (2y)^{\frac{n}{2}} e^{-y} \, 2dy$$

$$= 2 \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^{\infty} y^{\frac{n}{2}+1-1} e^{-y} dy$$

$$= 2 \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)$$

$$= 2 \cdot \frac{n}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) / \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = n.$$

問3、

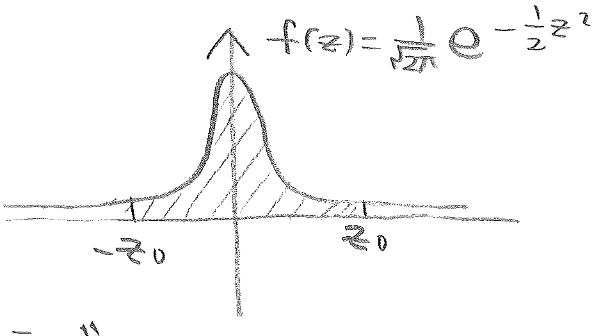
区間推定法により、母平均 μ は $100 \times \alpha$ % の確率で、

$$\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_0 < \mu < \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_0$$

に入る。

ただし、z_0 は、

$$\int_{-z_0}^{z_0} f(z) dz = \alpha$$



をみたすように えらぶ。

(1) 積分数値表により、$\alpha = 0.95$ のとき

$z_0 = 1.960$

よって

$$\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_0 = 1.24 - \frac{0.10}{5} \times 1.960 = 1.2008$$

$$\bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_0 = 1.24 + \frac{0.10}{5} \times 1.960 = 1.2792$$

$$\underline{1.20 \leq \mu \leq 1.28}$$

(2) 積分数値表より、$\alpha = 0.99$ のとき.

$z_0 = 2.576$

よって

$$\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_0 = 1.24 - \frac{0.10}{5} \times 2.576 = 1.18848$$

$$\bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_0 = 1.24 + \frac{0.10}{5} \times 2.576 = 1.29152$$

$$\underline{1.19 \leq \mu \leq 1.29}$$

問4. 区間推定法により、母分散 σ^2 は $100 \times \alpha$ % の確率で

$$\frac{ns^2}{x_2} < \sigma^2 < \frac{ns^2}{x_1}$$ に入る.

ただし、x_1, x_2 は、

$$\int_0^{x_1} T_{n-1}(x)\,dx = \frac{1-\alpha}{2}$$

$$\int_{x_2}^{\infty} T_{n-1}(x)\,dx = \frac{1-\alpha}{2}$$

をみたす. $T_{n-1}(x)$ は自由度 $(n-1)$ の χ^2 分布.

(1) 積分数値表より, $\alpha = 0.95$ のとき.

$x_1 = 2.70$ 　 $n = 10$

$x_2 = 19.02$ 　 よって

$$\underline{7.3 = \frac{ns^2}{x_2} \leq \sigma^2 \leq \frac{ns^2}{x_1} = 51.1}$$

(2) $\alpha = 0.99$ に対し、

$$x_1 = 1.73 \ , \ x_2 = 23.59$$

$$5.8 = \frac{ns^2}{x_2} \leq \sigma^2 \leq \frac{ns^2}{x_1} = 79.8$$

問5

(1) $\bar{x} = \frac{1}{5}(144+147+146+142+144) = 144.6$

$$s^2 = \frac{1}{5}\{(144-144.6)^2 + (147-144.6)^2 + (146-144.6)^2 + (142-144.6)^2 + (144-144.6)^2\}$$

$$= \frac{1}{5}(0.6^2 \times 2 + 2.4^2 + 1.4^2 + 2.6^2)$$

$$= \frac{1}{5}(\underbrace{0.36 \times 2}_{0.72} + 5.76 + 1.96 + 6.76) = 3.04$$

(2) 区間推定法により、母平均 μ は $100 \times \alpha$ % の確率で

$$\bar{x} - \frac{s\sqrt{z_1}}{\sqrt{n-1}} \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{s\sqrt{z_1}}{\sqrt{n-1}}$$

に入る。ただし、z_1, z_2 は、自由度 $(1, n-1)$ の F分布 $f_{1,n-1}(z)$ に対し、

$$\int_0^{z_1} f_{1,n-1}(z)dz = 0.99$$

をみたす数であり、積分数値表より、

$z_1 = 21.20$

さて、$\frac{s\sqrt{z_1}}{\sqrt{n-1}} = \sqrt{16.112} = 4.01$

よって

$$140.6 \leq \mu \leq 148.6$$