確率統計学・中間試験

（平成２７年１２月２４日、機械システム、１２６名）

30 問１ 次のデータの平均 μ および分散 σ^2 を求めなさい。

15　15

$$8, 7, 6, 4, 10.$$

20

問２ ある大学の学生の出身地はＡ県が４５パーセント、Ｂ県が３０パーセント、Ｃ県が２０パーセント、Ｄ県が５パーセントである。またそれぞれの県出身者で女子の占める割合は、Ａ県２５パーセント、Ｂ県４０％、Ｃ県５パーセント、Ｄ県５０パーセントである。この大学の一人の女子学生がＡ県出身である確率を求めなさい。

20

問３ （１）X が正規分布 $N(0,1)$ に従うとき、確率 $P(1.18 \leq X \leq 1.96)$ を求めなさい。 10

（２）Y が正規分布 $N(160,30)$ に従うとき、確率 $P(Y \geq 165)$ を求めなさい。 10

20

問４ 硬貨を１６００回投げるとき、表が現れる回数が７８０回以上８４０回以下である確率を、中心極限定理で概算しなさい。

10

問５ ポアソン分布 $P(X=k) = \dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ $(k = 0, 1, 2, 3, \cdots)$ の期待値は λ であることを示しなさい。ただし、$\lambda > 0$ とする。

積分数値表が裏面にあります。

解答例

問1.

$$\mu=\frac{1}{5}(8+7+6+4+10)=\underline{7}$$

15

$$\sigma^2=\frac{1}{5}\{(8-7)^2+(7-7)^2+(7-6)^2+(7-4)^2+(7-10)^2\}$$

$$=\frac{1}{5}20=\underline{4}$$

15

問2.

$$P(A)=\frac{45}{100}=\frac{9}{20},\quad P(W|A)=\frac{25}{100}=\frac{1}{4}$$

$$P(B)=\frac{30}{100}=\frac{3}{10},\quad P(W|B)=\frac{40}{100}=\frac{2}{5}$$

$$P(C)=\frac{20}{100}=\frac{1}{5},\quad P(W|C)=\frac{5}{100}=\frac{1}{20}$$

$$P(D)=\frac{5}{100}=\frac{1}{20},\quad P(W|D)=\frac{50}{100}=\frac{1}{2}$$

W:女子である事象

ベイズの定理により、

15

$$P(A|W)=\frac{P(A)P(W|A)}{P(W)}=\frac{\frac{9}{20}\cdot\frac{1}{4}}{P(W)}=\underline{\frac{45}{107}}$$

$$P(W)=P(A)P(W|A)+P(B)P(W|B)+P(C)P(W|C)+P(D)P(W|D)$$

$$=\frac{9}{20}\cdot\frac{1}{4}+\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{5}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{20}+\frac{1}{20}\cdot\frac{1}{2}$$

5

問3.　$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_z^\infty e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$ とする.

(1)

$P(1.18 \leq X \leq 1.96)$

$= \Phi(1.18) - \Phi(1.96)$

$= 0.1190 - 0.0250 = 0.094$

以上が積分数値表により分かる.

約 9.4 %

(2) $P(Y \geq 165)$

$\mu = 160$
$\sigma^2 = 30$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{165}^\infty \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx$

変数変換 $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ により、

$\frac{165-160}{\sqrt{30}} = \sqrt{\frac{5}{6}} \fallingdotseq 0.913$

$P(Y \geq 165) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{\frac{5}{6}}}^\infty \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right) dz$

$= \Phi\left(\sqrt{\frac{5}{6}}\right) \fallingdotseq 0.1814$

約 18 %

問4. 2項分布 $Bin(1600, \frac{1}{2})$ にしたがう.

確率 $P = \sum_{x=780}^{840} {}_nC_x\, p^x (1-p)^{n-x} \quad \left(\begin{array}{l} n=1600 \\ p=\frac{1}{2} \end{array} \right)$

$= \sum_{x=780}^{840} {}_{1600}C_x \left(\frac{1}{2}\right)^{1600}$

$n=1600$ は十分大なので、中心極限定理により,

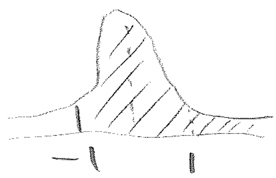
$$P = \int_{780}^{840} \frac{1}{2\pi\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx$$

ただし, $\mu = np = 800$

$\sigma^2 = np(1-p) = 400 = 20^2$

変数変換 $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ により、

$$\left(\begin{array}{l} \frac{840-800}{20} = 2 \\ \frac{780-800}{20} = -1 \end{array} \right.$$



$P = \Phi(-1) - \Phi(2)$

$= (1-\Phi(1)) - \Phi(2)$

$= 1 - \Phi(1) - \Phi(2)$

$= 1 - 0.1587 - 0.0228 \fallingdotseq 0.8185$

約 82%

問5、

$$期待値 = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda} \cdot \lambda$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \cdot \lambda$$

$$= e^{\lambda} e^{-\lambda} \cdot \lambda = \lambda 、$$

指数関数のTaylor展開 $e^{\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}$ を用いた.