数学III 期末試験　２０１５

（平成２８年２月５日、情報・応用生命（１３１名）、電気電子（５８名））

20 **問１** 関数 $f(z) = \bar{z} = x - iy$ の線積分 $\int_C f(z)dz$ を計算しなさい。ただし C は始点 0 と終点 $1+2i$ を直線で結ぶ経路とする。

問２ 関数 $f(z) = \frac{z^3+5}{z(z-1)^3}$, $g(z) = \frac{\cos z}{z^3}$ とする。次の留数を求めなさい。
20

$$\mathrm{Res}_{z=0} f(z), \qquad \mathrm{Res}_{z=0} g(z).$$

10　10

問３ 次の関数 $f(z)$ の原点 $z=0$ を中心とするローラン展開を求めなさい。
20

$$f(z) = z^2 e^{-\frac{1}{z}}.$$

20 **問４** 定積分 $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - 2c\cos\theta + c^2} d\theta$ を以下の誘導に従い計算しなさい。ただし、$-1 < c < 1$ とする。

（１）変数変換 $z = e^{i\theta}$ により I を z の積分で表しなさい。 10

（２）定積分 I を求めなさい。

10

20 **問５** 定積分 $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2} dx$ を以下の誘導に従い計算しなさい。

（１）$R > 1$ とする。C_1 は、始点 $-R$ と終点 R を直線で結ぶ図のような経路で、C_2 は原点を中心とする半径 R の反時計回りの半円で、図のように上半平面にあるとする。次の $C_1 + C_2$ 上の積分を求めなさい。

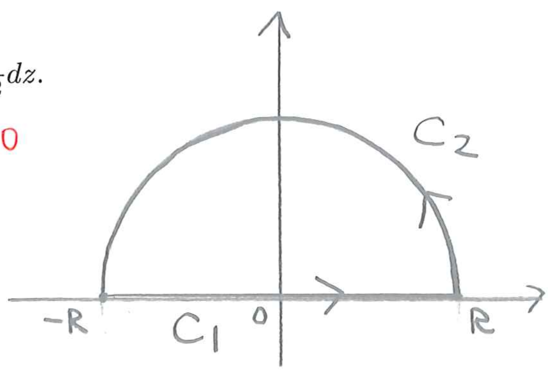
$$\int_{C_1+C_2} \frac{1}{(z^2+1)^2} dz.$$

10

（２）$\lim_{R\to\infty} \int_{C_2} \frac{1}{(z^2+1)^2} dz$ を求めなさい。 5

（３）定積分 I を求めなさい。

5



数III 2015

問1. C のパラメータ表示は、$z = z(t) = (1+2i)t$
$(0 \leq t \leq 1)$ 5

$$\int_C f(z)\,dz$$
$$= \int_0^1 (1-2i)t\,(1+2i)\,dt \quad 10$$
$$= 5\int_0^1 t\,dt = 5\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \underline{\frac{5}{2}} \quad 5$$

問2.

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \lim_{z\to 0} z f(z)$$
$$= \lim_{z\to 0} \frac{z^3+5}{(z-1)^3} = \underline{-5} \quad 10$$

$$\operatorname*{Res}_{z=0} g(z) = \frac{1}{(3-1)!} \lim_{z\to 0}\left(\frac{d}{dz}\right)^{3-1} z^3 g(z)$$
$$= \frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\left(\frac{d}{dz}\right)^2 \cos z$$
$$= \frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}(-\cos z) = \underline{-\frac{1}{2}} \quad 10$$

問3. $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ であるから、

$$f(z) = z^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-1)^n z^{-n}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} z^{-n+2}$$
$$= \underline{\sum_{n=-\infty}^{2} \frac{(-1)^n}{(n-2)!} z^n} \quad 20$$

問4.

(1) $z = e^{i\theta}$ $\quad \frac{dz}{iz} = d\theta$

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$$

であるから.

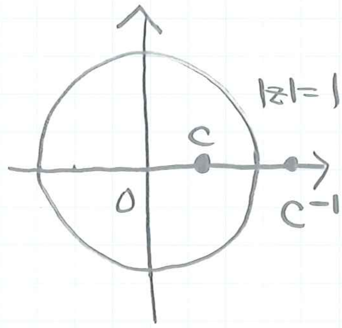
$$I = \int_{|z|=1} \frac{1}{1 - c(z+z^{-1}) + c^2} \frac{dz}{iz}$$

5

5

(2) $c \neq 0$ ならば

$$I = \frac{i}{c}\int_{|z|=1} \frac{dz}{(z-c)(z-c^{-1})}$$



留数定理により.

$$I = 2\pi i \frac{i}{c} \operatorname*{Res}_{z=c} \frac{1}{(z-c)(z-c^{-1})}$$

$$= -\frac{2\pi}{c} \lim_{z \to c} (z-c) \frac{1}{(z-c)(z-c^{-1})}$$

$$= -\frac{2\pi}{c} \frac{1}{c-c^{-1}} = \frac{2\pi}{1-c^2}$$

$c = 0$ ならば

$$I = \int_{|z|=1} \frac{dz}{iz} = \frac{1}{i} 2\pi i = 2\pi$$

まとめて.

$$\underline{I = \frac{2\pi}{1-c^2}}$$

10

問5.

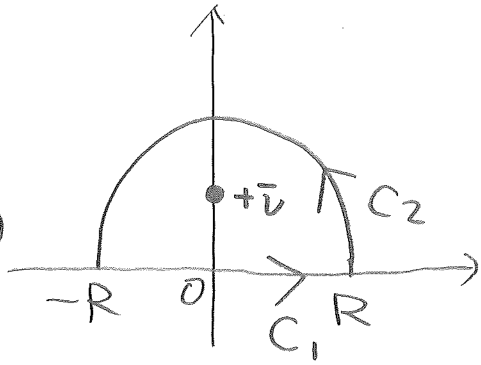
$f(z) = 1/(z^2+1)^2$ とする。

(1) $f(z) = \dfrac{1}{(z+i)^2(z-i)^2}$ は $z=\pm i$ に

2位の極をもつ。

閉曲線 C_1+C_2 の内側にある極は

$z=+i$ のみ。



$$\underset{z=i}{\mathrm{Res}}\, f(z)$$

$$= \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z\to i} \left(\frac{d}{dz}\right)^{2-1} (z-i)^2 f(z)$$

$$= \lim_{z\to i} \frac{d}{dz} \frac{1}{(z+i)^2}$$

$$= (-2) \lim_{z\to i} \frac{1}{(z+i)^3} = -2 \times \frac{1}{8(-i)} = -\frac{i}{4}$$

留数定理により,

$$\int_{C_1+C_2} f(z)\,dz = 2\pi i \underset{z=i}{\mathrm{Res}}\, f(z)$$

$$= 2\pi i \times \left(-\frac{i}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$$

(2) C_2 のパラメータ表示は,

$$C_2 : z = z_2(\theta) = Re^{i\theta} \qquad (0 \leq \theta \leq \pi)$$

$$\left| \int_{C_2} f(z)\,dz \right| = \left| \int_0^{\pi} \frac{1}{((Re^{i\theta})^2+1)^2} iRe^{i\theta}\,d\theta \right|$$

$$\leq \int_0^{\pi} \left| \frac{iRe^{i\theta}}{((Re^{i\theta})^2+1)^2} \right| d\theta$$

$$\leq \int_0^{\pi} \frac{R}{(R^2-1)^2}\, d\theta = \frac{\pi R}{(R^2-1)^2} \longrightarrow 0 \quad (R \to \infty)$$

(3) $\displaystyle \lim_{R\to\infty} \int_{C_1} f(z)\,dz = I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx$

(1)(2)を用いると、

$$\frac{\pi}{2} = \left(\int_{C_1} + \int_{C_2}\right) f(z)\,dz \longmapsto I \quad (R \to \infty)$$

よって $\underline{I = \dfrac{\pi}{2}}$