数学III 中間試験

（平成２７年１２月２１日、電気電子、５８名）

問１ 次の複素数を $a+bi\ \ (a,b\in\mathbf{R})$ の形に書きなさい。

30

$$\log(1+\sqrt{3}i),\qquad i^i,\qquad \cos(i).$$

10　10　10

問２ 次の関数 $f(z)$ が複素平面 $\mathbf{C}$ 上正則関数になるように、実定数 a,b を定めなさい。ただし、$z=x+iy$ とする。

20

$$f(z)=e^{3x}(\cos(ay)+i\sin(by)).$$

問３ 原点０から点 $1+i$ へと向かう直線を C とするとき、次の積分を計算せよ。

25

$$\int_C(|z|+|z|^2)dz.$$

問４ 次の積分を求めなさい。

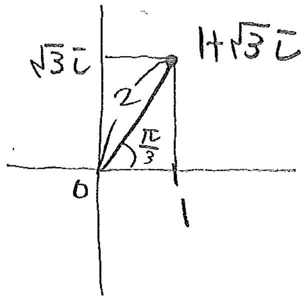
25

$$\int_{|z|=3}\frac{2z-1}{z^2-z}dz.$$

問1.

・ $\log(1+\sqrt{3}i)$

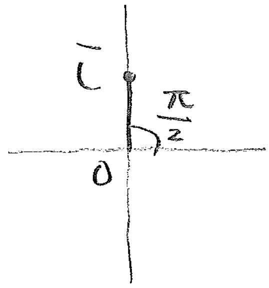
$= \underbrace{\log 2 + \frac{\pi}{3}i + 2\pi i n}$ $(n \in \mathbb{Z})$



・ $\log(i)$

$= \log 1 + \frac{\pi}{2}i + 2\pi i n \quad (n \in \mathbb{Z})$

$= \frac{\pi}{2}i + 2\pi i n$



$i^i = \exp(i \log(i))$

$= \exp\left(i\left(\frac{\pi}{2}i + 2\pi i n\right)\right) = \underbrace{e^{-\frac{\pi}{2} - 2\pi n}}$ $(n \in \mathbb{Z})$

・ $\cos(i) = \frac{1}{2}\left(e^{i \cdot i} + e^{-i \cdot i}\right)$

$= \underbrace{\frac{1}{2}(e + e^{-1})}$

問2. $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$

$u(x, y) = e^{3x} \cos(ay)$

$v(x, y) = e^{3x} \sin(by)$

$$\begin{cases} u_x = 3e^{3x}\cos(ay) \\ u_y = -ae^{3x}\sin(ay) \\ v_x = 3e^{3x}\sin(by) \\ v_y = be^{3x}\cos(by) \end{cases}$$

となり全て連続

Cauchy-Riemann 方程式 $u_x = v_y,\ u_y = -v_x$

$\Longleftrightarrow \quad \underline{a = b = 3}$

問3. $C : z = z(t) = (1+i)t \quad (0 \leq t \leq 1)$

$$\int_C (|z| + |z|^2)\,dz$$

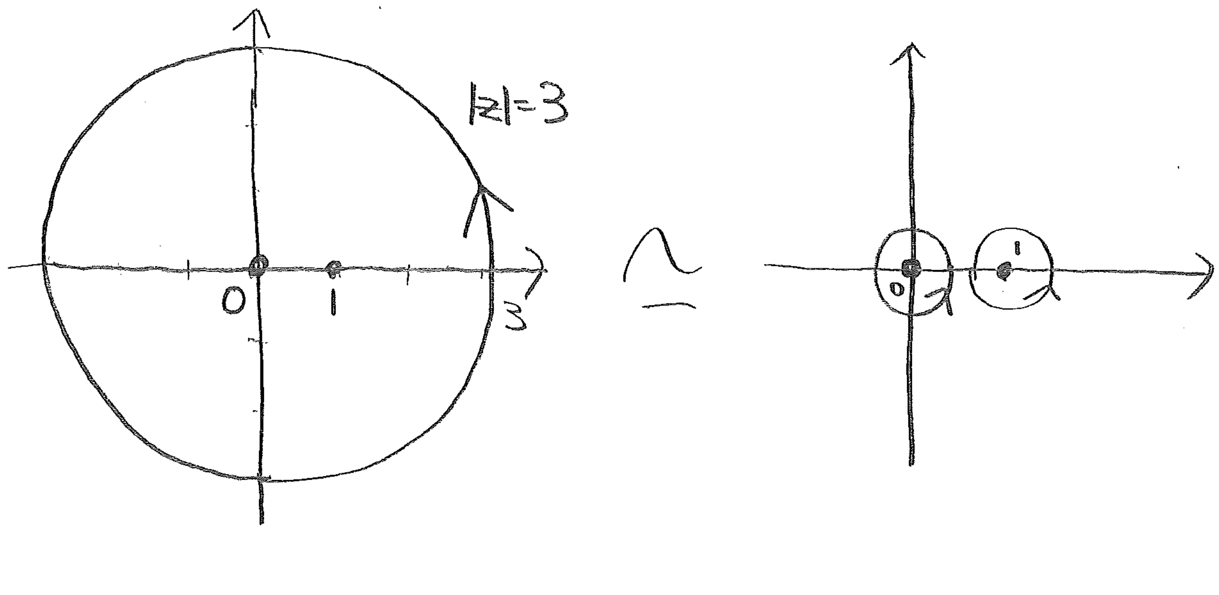
$$= \int_0^1 (\sqrt{2}t + 2t^2)(1+i)\,dt$$

$$= (1+i)\left[\frac{1}{\sqrt{2}}t^2 + \frac{2}{3}t^3\right]_0^1$$

$$= \underline{(1+i)\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{3}\right)}$$

問4. 被積分関数を変形

$$\frac{2z-1}{z^2-z} = \frac{2z-1}{z(z-1)} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z-1}$$



③

積分路 $|z|=3$ の内側で正則でないのは、

$z=0, 1$ のみ。よって、Cauchyの積分定理により、

$z=0$ をかこむ小さな円 C_0 と

$z=1$ 〃 C_1 とに

$|z|=3$ を連続変形してよい。

$$\int_{|z|=3} \frac{2z-1}{z^2-z}\,dz = \left(\int_{C_0} + \int_{C_1}\right)\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1}\right)dz$$

$$\int_{C_0} \frac{1}{z-1}\,dz = 0, \quad \int_{C_1} \frac{1}{z}\,dz = 0$$ であるから、

$$\int_{|z|=3} \frac{2z-1}{z^2-z}\,dz = \int_{C_0} \frac{1}{z}\,dz + \int_{C_1} \frac{1}{z-1}\,dz$$

Cauchyの積分表示により、

$$\int_{C_0} \frac{1}{z}\,dz = 2\pi i, \quad \int_{C_1} \frac{dz}{z-1} = 2\pi i.$$

よって、

$$\int_{|z|=3} \frac{2z-1}{z^2-z}\,dz = 2\pi i + 2\pi i = 4\pi i$$