数学III 中間試験

（平成２７年１２月１６日、情報・応用生命、１３１名）

30

問１　次の複素数を $a+bi\ \ (a, b \in \mathbf{R})$ の形に書きなさい。

$$e^{\frac{3}{2}\pi i}, \qquad (-1)^i, \qquad \sin(-i).$$

10　10　10

20

問２　次の関数 $f(z)$ が複素平面 $\mathbf{C}$ 上正則関数になるように、実定数 a, b を定めなさい。ただし、$z = x + iy$ とする。

$$f(z) = x^3 - 3xy^2 + (ax^2y + by^3)i.$$

20

問３　原点０から点 i へと向かう直線を C とするとき、次の積分を計算せよ。

$$\int_C \frac{1}{\sqrt{z}} dz.$$

30

問４　関数 $f(z) = \dfrac{z^2+1}{z(z-1)^3}$ とする。

（１）積分 $\displaystyle\int_{|z|=\frac{1}{2}} f(z)dz$ を求めよ。

（２）積分 $\displaystyle\int_{|z|=2} f(z)dz$ を求めよ。

問1.

・ $e^{\frac{3}{2}\pi i} = \cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) + i\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -i$

10

・ $(-1)^i = \exp(i\log(-1))$

$\log(-1) = \log 1 + \pi i + 2\pi i n \quad (n \in \mathbb{Z})$

$= \pi i + 2\pi i n$ であるから、

$(-1)^i = \exp(i(\pi i + 2\pi i n))$

$= \exp(-\pi - 2\pi n) \quad (n \in \mathbb{Z})$

10

・ $\sin(-i) = \frac{1}{2i}\left(e^{i(-i)} - e^{-i(-i)}\right)$

$= \frac{1}{2i}(e - e^{-1}) = i\frac{1}{2}(e^{-1} - e)$

10

問2.

$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$

$$\begin{cases} u(x,y) = x^3 - 3xy^2 \\ v(x,y) = ax^2y + by^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_x = 3x^2 - 3y^2 \\ u_y = -6xy \\ v_x = 2axy \\ v_y = ax^2 + 3by^2 \end{cases}$$ となり、全て連続。

Cauchy Riemann 方程式

$u_x = v_y,\ u_y = -v_x \iff a = 3, b = -1$

問3.　$C : z = z(t) = it \quad (0 \leq t \leq 1)$

$$\int_C \frac{1}{\sqrt{z}}\,dz = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{it}}\, i\,dt = e^{\frac{\pi}{4}i}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt$$

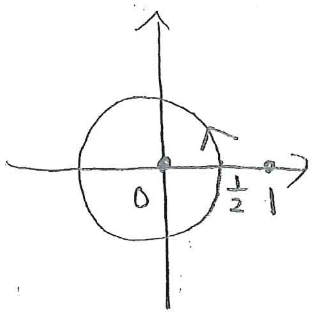
$$= e^{\frac{\pi}{4}i}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$$

$$= e^{\frac{\pi}{4}i}\left[2t^{\frac{1}{2}}\right]_0^1$$

$$= 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = \underline{\sqrt{2}(1+i)}$$

問4.

(1)



積分路の内側で正則でないのは $z=0$ のみ.

$g(z) = \dfrac{z^2+1}{(z-1)^3}$ とおく.

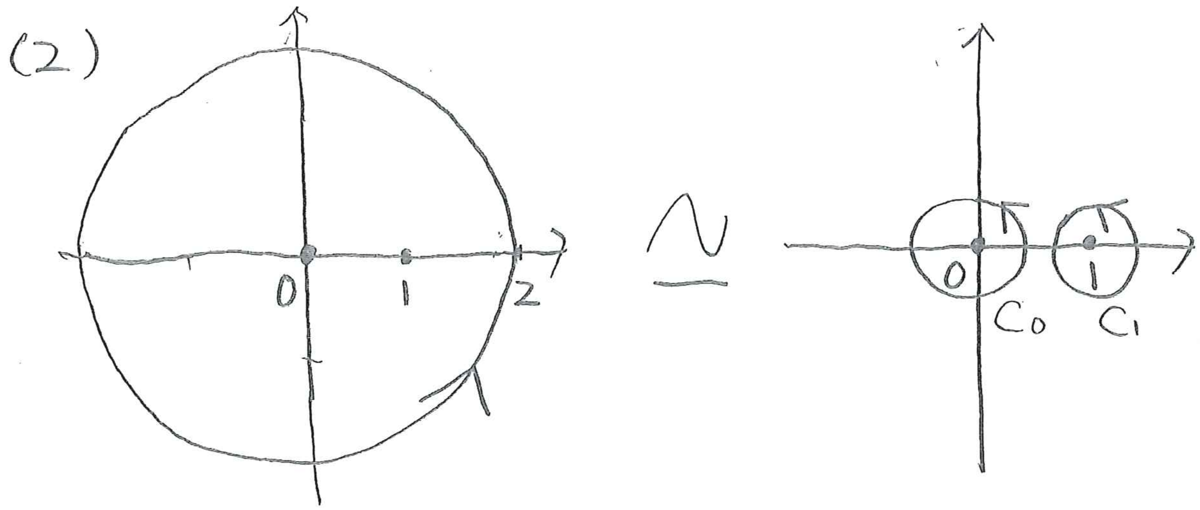
Cauchy の積分表示により,

$$\int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{g(z)}{z}\,dz = 2\pi i\, g(0)$$

$$= 2\pi i(-1) = \underline{-2\pi i}$$

15

(2)



積分路 $|z|=2$ の内側で正則でないのは、
$z=0, 1$ のみ。Cauchy の積分定理により、
点 1 のみ含む小さな円 C_1 と、
点 0 〃 C_0 とに $|z|=2$ は
連続変形してよい。

$$\int_{|z|=2} f(z)\,dz = \int_{C_0} f(z)\,dz + \int_{C_1} f(z)\,dz$$

10

(1) により、

$$\int_{C_0} f(z)\,dz = -2\pi i$$

$1+(-1)\frac{1}{z^2}$

$(-1)(-2)\frac{1}{z^3}$

$g(z)=\frac{z^2+1}{z}$ とおけば、Cauchy の積分表示により、

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_1} g(z)\frac{1}{(z-1)^3}\,dz$$

$g'(z)=1-\frac{1}{z^2}$

$g^{(2)}(z)=2z^{-3}$

$$= \frac{2\pi i}{2!}g^{(2)}(1) = 2\pi i$$

$$\int_{|z|=2} f(z)\,dz = \left(\int_{C_1}+\int_{C_2}\right) f(z)\,dz = 2\pi i - 2\pi i = \underline{0}$$

5