微積分解法２０１５　期末試験

問１　次の関数の原始関数を求めなさい。

$$\tan x, \qquad \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}, \qquad x\log x.$$

問２　有理関数 $R(x)=\dfrac{1}{x^3-x}$ に関する以下の問いに答えよ。

（１）$R(x)$ の部分分数展開を求めよ。

（２）原始関数 $\displaystyle\int R(x)dx$ を求めよ。

問３　次の原始関数を誘導に従い求めなさい。

$$\int \frac{1}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}dx \qquad (a,b>0).$$

（１）変数変換 $t=\tan x$ を施せ。

（２）原始関数を求めよ。

問４　次の微分方程式の一般解を求めよ。

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\tan y\ \cos^2 y}{\tan x\ \cos^2 x}.$$

問５　xy 平面において、曲線 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ の $0\leq x\leq 1$ に対応する部分の長さを L とする。以下の問いに答えよ。

（１）$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ の原始関数を求めよ。

（２）$\displaystyle 2\int\sqrt{1+x^2}dx = x\sqrt{1+x^2}\ \cancel{\pm}\ + \int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$ を示せ。

（３）長さ L を求めよ。

問1.

・ $\int \tan x\,dx = -\log|\cos x| + C$.

実際 $(-\log|\cos x|)' = -\dfrac{(\cos x)'}{\cos x} = \tan x$

・ $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \mathrm{Arcsin}\,t + C$

$\left(t = \frac{x}{2}\right)$ $= \mathrm{Arcsin}\left(\frac{x}{2}\right) + C$

・ 部分積分する.

$\displaystyle\int x\log x\,dx = \frac{1}{2}x^2\log x - \int \frac{x}{2}\,dx$

$= x^2\left(\frac{1}{2}\log x - \frac{1}{4}\right) + C$

問2.

(1) $R(x) = \dfrac{1}{x(x+1)(x-1)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x+1} + \dfrac{C}{x-1}$

~~分母~~をはらう.

$1 = A(x+1)(x-1) + Bx(x-1) + Cx(x+1)$.

・$x=0$ とする.

$1 = -A$ $\quad\therefore\quad A = -1$

・$x=1$ とする.

$1 = 2C$ $\quad\therefore\quad C = \dfrac{1}{2}$

・$x=-1$ とする.

$1 = 2B$ $\quad\therefore\quad B = \dfrac{1}{2}$

まとめて

$$R(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{x-1}$$

(2) $\displaystyle\int R(x)\,dx$

$= -\log|x| + \dfrac{1}{2}\log|x+1| + \dfrac{1}{2}\log|x-1| + C.$

$= \log \dfrac{\sqrt{|x^2-1|}}{|x|} + C.$

問3.

③

(1) $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ である。 ($t = \tan x$ とおく)

$$\int \frac{1}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{a^2 + b^2\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} \frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$= \underline{\int \frac{1}{a^2 + b^2 t^2}\,dt}$$

(2)

$$\int \frac{dt}{a^2 + b^2 t^2}$$

$$= \frac{1}{ab}\int \frac{1}{1 + \left(\frac{b}{a}t\right)^2} \frac{b}{a}\,dt$$

$$= \frac{1}{ab}\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{b}{a}t\right) + C$$

$$= \underline{\frac{1}{ab}\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{b}{a}\tan x\right) + C}$$

問4.

$$\frac{1}{\tan y \cos^2 y}\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\tan x \cdot \cos^2 x}.$$

両辺を x で積分すると、

$$\int \frac{1}{\tan y \cos^2 y}\,dy = -\int \frac{1}{\tan x \cdot \cos^2 x}\,dx$$

$$\log|\tan y| = -\log|\tan x| + C'$$

$$\log|\tan x \tan y| = C'$$

よって

$$\underline{\tan x \cdot \tan y = C} \quad (C\text{は定数}).$$

問5.

(1) $g(x) = \underline{\log(x+\sqrt{1+x^2}) + C}$

実際, $g'(x) = \dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\dfrac{1}{2}\dfrac{2x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

(2) 両辺を微分すると,

$$\mathrm{LHS} = 2\sqrt{1+x^2}$$

$$\mathrm{RHS} = \sqrt{1+x^2} + x\,\frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \sqrt{1+x^2} + \frac{x^2+1}{\sqrt{1+x^2}} = 2\sqrt{1+x^2}.$$

(3) $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2$ とする.

$$L = \int_0^1 \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

$$= \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx$$

$$= \left[\frac{x}{2}\sqrt{1+x^2}\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\left[\log(x+\sqrt{1+x^2})\right]_0^1$$

$$= \underline{\frac{1}{2}\left(\sqrt{2} - \log(1+\sqrt{2})\right)}$$