微積分解法２０１５　期末試験

問１　次の関数の原始関数を求めなさい。

$$\log x,\qquad \frac{1}{\sqrt{x^2+1}},\qquad \frac{x}{x^2+1}.$$

問２　有理関数 $R(x)=\dfrac{1}{x^2(x^2+1)}$ に関する以下の問いに答えよ。

（１）$R(x)$ の部分分数展開を求めよ。
（２）原始関数 $\displaystyle\int R(x)dx$ を求めよ。

問３　次の原始関数を誘導に従い求めなさい。

$$(*)\qquad \int \frac{1}{\sin x}dx.$$

（１）$t=\tan\frac{x}{2}$ とおく。次の式を示せ。

$$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{2}(1+t^2),\quad \sin x=\frac{2t}{1+t^2}.$$

（２）原始関数 $(*)$ を求めよ。

問４　次の微分方程式の一般解を求めよ。

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y(1+y^2)}{x(1+x^2)}.$$

問５　xy 平面において、２曲線 $C_1: y=\sin x\ (\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{5}{4}\pi)$, $C_2: y=\cos x\ (\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{5}{4}\pi)$ によって囲まれた図形を D とする。D を x 軸の周りに１回転して得られる立体の体積を V とする。以下の問いに答えよ。

（１）xy 平面上に D を図示しなさい。
（２）V を求めよ。

問1 ①

- $\int \log x\,dx = \underline{x\log x - x + C}$.

実際、

$$(x\log x - x + C)' = \log x + x\frac{1}{x} - 1 = \log x.$$

- $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \underline{\log(x+\sqrt{x^2+1}) + C}$

実際、

$$(\log(x+\sqrt{x^2+1}))' = \frac{1+\frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

- $\int \frac{x\,dx}{x^2+1} = \underline{\frac{1}{2}\log(x^2+1) + C}$

実際、

$$\left(\frac{1}{2}\log(x^2+1)\right)' = \frac{1}{2}\frac{(x^2+1)'}{x^2+1} = \frac{x}{x^2+1}.$$

問2.

(1) $$R(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

分母をはらって、

$$1 = Ax(x^2+1) + B(x^2+1) + (Cx+D)x^2$$
$$= (A+C)x^3 + (B+D)x^2 + Ax + B$$

$\therefore$ $A+C=0,\ B+D=0,\ A=0,\ B=1$

$\therefore$ $A=0,\ B=1,\ C=0,\ D=-1.$

よって $R(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1}$.

(2)
$$\int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1} \right) dx$$
$$= -\frac{1}{x} - \mathrm{Arctan}\, x + C.$$

問3.

(1) $\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{\frac{1}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}=\dfrac{1}{2}(1+t^2).$

$$\sin x=\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$$

$$=2\frac{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=2\frac{t}{1+t^2}.$$

(3) $t=\tan\frac{x}{2}$ とおく. (1)により、

$$\int\frac{1}{\sin x}dx=\int\frac{1+t^2}{2t}\times\frac{2}{1+t^2}dt$$

$$=\int\frac{1}{t}dt$$

$$=\log|t|+C$$

$$=\underline{\log\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C}$$

問4

変数分離形である.

$$\frac{1}{y(1+y^2)}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x(1+x^2)} \cdot \text{---} (*)$$

さて, $\dfrac{1}{x(x^2+1)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{Bx+C}{x^2+1}$.

分母をはらって,

$$1 = A(x^2+1) + (Bx+C)x$$
$$= (A+B)x^2 + Cx + A$$

$$\therefore\ A=1,\ B=-1,\ C=0.$$

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}$$

(*)を積分する.

$$\int \frac{1}{y(1+y^2)}dy = \int \frac{1}{x(1+x^2)}dx$$

$$\int \left(\frac{1}{y} - \frac{y}{1+y^2}\right)dy = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right)dx$$

$$\log|y| - \frac{1}{2}\log(1+y^2) = \log|x| - \frac{1}{2}\log(1+x^2) + C'$$

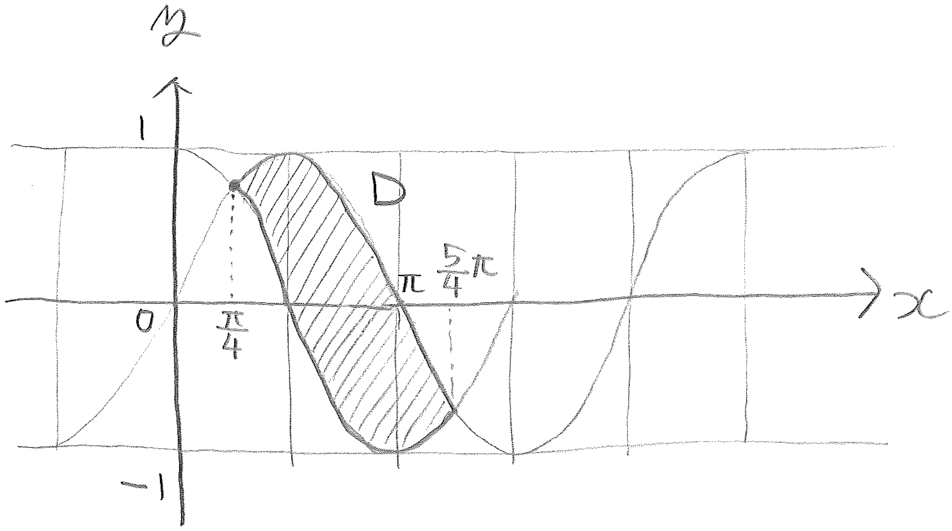
$$\log\frac{|y|}{\sqrt{1+y^2}} = \log\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} + C'$$

よって $\dfrac{x^2(1+y^2)}{y^2(1+x^2)} = C$ 　　Cは定数.

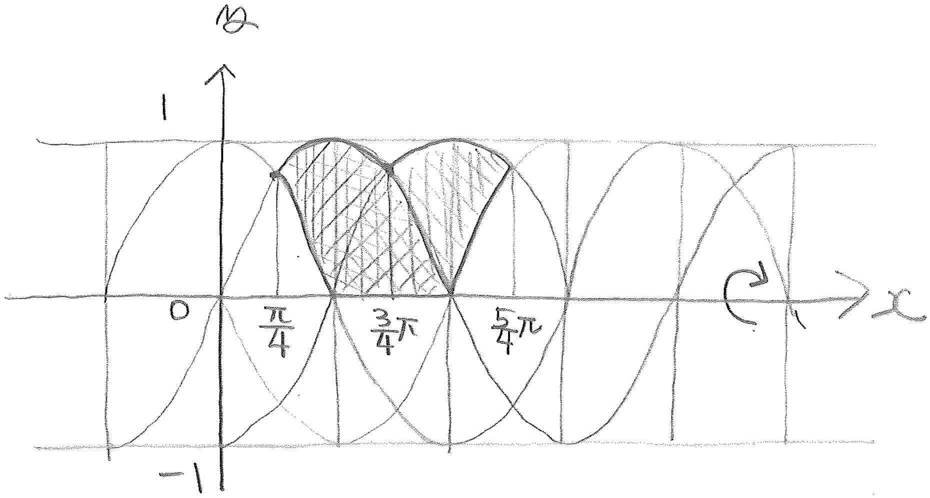
⑤

問5.

(1)



(2)



Dをx軸のまわりに1回転するとき、重複が生じることに注意する.

$$V=\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}(\sin^2 x-\cos^2 x)\,dx+\pi\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi}(\cos^2 x-\sin^2 x)\,dx$$

$$=2\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}(\sin^2 x-\cos^2 x)\,dx$$

$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$, $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$ により,

$$V=2\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\frac{1}{2}\left\{(1-\cos 2x)-(1+\cos 2x)\right\}dx$$

$$=\pi\left[x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}-\pi\left[x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\pi\left\{\left(\frac{\pi}{2}+1\right)-\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)\right\}=\underline{\frac{3}{2}\pi+\frac{\pi^2}{4}}$$