微積分解法２０１５　期末試験・予想問題？

問１　次の原始関数を求めなさい。

$$\int \left(x + \frac{1}{x}\right) dx, \qquad \int \frac{1}{x^2 - x + 1} dx, \qquad \int x \ \cos x dx.$$

問２　有理関数 $R(x) = \dfrac{1}{x(x+1)^2}$ に関する以下の問いに答えよ。

（１）$R(x)$ の部分分数展開を求めよ。
（２）原始関数 $\int R(x) dx$ を求めよ。

問３　次の原始関数を求めなさい。

$$\int \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx.$$

ヒント：変換 $t = \tan x$

問４　次の微分方程式を解きなさい。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}.$$

ヒント：変換 $y = x \cdot u$

問５　円 $x^2 + (y-2)^2 = 1$ およびその内部を x 軸の周りに回転して得られる回転体の体積 V を求めよ。

（解答例）

問1.

・ $\int \left(x+\frac{1}{x}\right)dx = \underline{\frac{1}{2}x^2 + \log|x| + \mathrm{Const.}}$

・ $\frac{1}{x^2-x+1} = \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}\times\frac{1}{\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}(2x-1)\right\}^2+1}$

$t=\frac{1}{\sqrt{3}}(2x-1)$ とおく． $\frac{dt}{dx}=\frac{2}{\sqrt{3}}$

$$\int \frac{1}{x^2-x+1}dx = \frac{2}{\sqrt{3}}\int\frac{1}{t^2+1}dt$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{Arctan}\, t + C$$

$$= \underline{\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{Arctan}\frac{1}{\sqrt{3}}(2x-1) + \mathrm{Const}}$$

・ 部分積分する．

$$\int x\cos x\, dx$$

$u=x \quad u'=1$
$v'=\cos x \quad v=\sin x$

$$= x\sin x - \int \sin x\, dx$$

$$= \underline{x\sin x + \cos x + \mathrm{Const.}}$$

問2、

(1) $R(x) = \dfrac{1}{x(x+1)^2} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x+1} + \dfrac{C}{(x+1)^2}$.

両辺に $x(x+1)^2$ をかける.

$$1 = A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx.$$

・$x=0$ とすると、

$1 = A$ $\quad\therefore\ A=1$

・$x=-1$ とすると、

$1 = -C$ $\quad\therefore\ C=-1$

・x^2 の係数を比較する.

$0 = A+B = 1+B$ $\quad\therefore\ B=-1$

まとめて、

$$\underline{R(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}.}$$

(2) $$\int R(x)\,dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}\right)dx$$

$$\underline{= \log|x| - \log|x+1| + \frac{1}{x+1} + \mathrm{Const}.}$$

問3.

$t = \tan x$ とおく. $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

さて, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ であるから,

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} .$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$$

$$= \int \frac{1}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \cdot \cos^2 x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$= \int \frac{1}{t^2 \times \frac{1}{1+t^2}} dt = \int \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt$$

$$= \int \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt$$

$$= t - \frac{1}{t} + \text{Const.}$$

$$= \tan x - \frac{1}{\tan x} + \text{Const.}$$

問4.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 + \frac{y}{x}}{1 - \frac{y}{x}} . \quad \text{——— } (☆)$$

$y = x \cdot u$ とおくと.

$\dfrac{dy}{dx} = u + x\dfrac{du}{dx}$ であるから (☆) は,

$x\dfrac{du}{dx} + u = \dfrac{1+u}{1-u}$. つまり,

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \frac{1+u^2}{1-u} \quad \text{——— } (☆☆)$$

変数分離形である。

$$\frac{1-u}{1+u^2}\frac{du}{dx}=\frac{1}{x}$$

両辺を x で積分して、

$$\int \frac{1-u}{1+u^2}\frac{du}{dx}\,dx=\int\frac{1}{x}\,dx$$

$$\int \frac{1-u}{1+u^2}\,du=\int\frac{1}{x}\,dx$$

$$\mathrm{Arctan}\,u-\frac{1}{2}\log(1+u^2)=\log|x|+\mathrm{Const.}$$

$$\mathrm{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{1}{2}\log\left(1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)=\log|x|+\mathrm{Const.}$$

まとめて、

$$\mathrm{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{2}\log(x^2+y^2)+\mathrm{Const.}$$

問5. 教科書 P.87. 例題 9.2 と同じ。

$$4\pi^2$$