100点満点

# 微積分解法２０１５　中間試験（６月１７日（水））

20 **問１** 次の極限値をもとめなさい。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$, 10　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}$. 10

20 **問２** 次の極限値をもとめなさい。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3-x}}{x}$, 10　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+2x^2+x}{4x^4+3x^3+2x^2+x}$. 10

20 **問３** 関数 $f(x)$ を次のように定める。

$$f(x)=\begin{cases}1 & (x>0)\\ 0 & (x=0)\\ -1 & (x<0)\end{cases}.$$

（１） $y=f(x)$ のグラフを描きなさい。 10

（２） 関数 $f(x)$ は、$x=0$ で連続ではないことを示しなさい。 10

20 **問４** 関数 $f(x), g(x)$ を次で定義する。

$$f(x)=x^3\log x,\qquad g(x)=\mathrm{Arcsin}(x^2).$$

（１）関数 $f(x), g(x)$ の導関数 $f'(x)$ 5, $g'(x)$ 5 を求めなさい。

（２）関数 $f(x), g(x)$ の２次導関数 $f''(x)$ 5, $g''(x)$ 5 を求めなさい。

20 **問５** 関数 $g(y)=\cos y,\ f(x)=\cos^2 x$ に関する以下の問いに答えなさい。

（１）関数 $g(y)$ のマクローリン展開（$y=0$ を中心としたテイラー展開）を求めなさい。 10

（２）$\cos^2 x$ を $\cos(2x)$ を用いて表しなさい。 5

（３）関数 $f(x)$ のマクローリン展開を求めなさい。 5

注： マクローリン展開の剰余項の収束に関する考察は省略してよろしい。

（解答例1）

問1.

(1) $\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$

$$=\sqrt{n}\,\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$=\frac{\sqrt{n}\,(n+1-n)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$$

よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\frac{1}{2}$

(2) $1+2+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$

よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}$$

問2.

(1) $\dfrac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3-x}}{x}$

$$=\frac{1}{x}\,\frac{\left(\sqrt{3+x}-\sqrt{3-x}\right)\left(\sqrt{3+x}+\sqrt{3-x}\right)}{\sqrt{3+x}+\sqrt{3-x}}$$

$$=\frac{1}{x}\,\frac{(3+x)-(3-x)}{\sqrt{3+x}+\sqrt{3-x}}=\frac{2}{\sqrt{3+x}+\sqrt{3-x}}$$

よって $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3-x}}{x}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

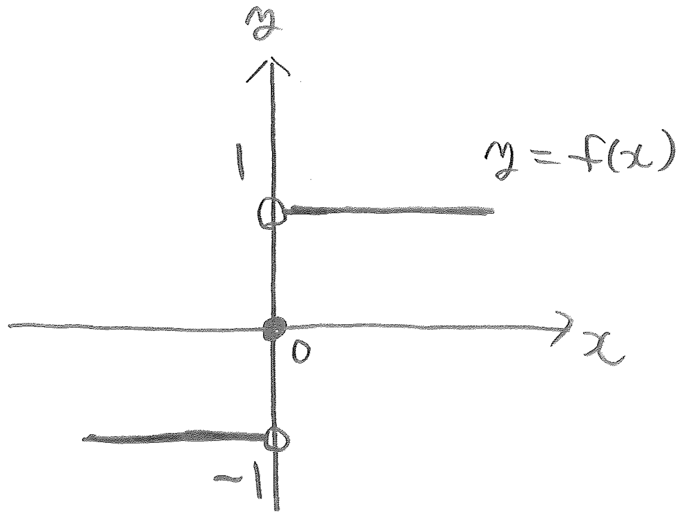
(2)

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^3+2x^2+x}{4x^4+3x^3+2x^2+x}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{3+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{4x+3+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}} = 0$$

問3、

(1)




(2)

$$\lim_{x \to +0} f(x) = \lim_{x \to +0} 1 = 1$$

$$\lim_{x \to -0} f(x) = \lim_{x \to -0} (-1) = -1.$$

$$f(0) = 0$$

右極限，左極限はともに異なり、しかも

$f(0)=0$ とも異なる. よって $x=0$ で

連続ではない.

問4.

(1) $f'(x) = 3x^2 \log x + x^3 \frac{1}{x}$

$= \underline{x^2(3\log x + 1)}$

$g'(x) = \frac{(x^2)'}{\sqrt{1-(x^2)^2}}$

$= \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$

(2) $f''(x) = (x^2(3\log x + 1))'$

$= 2x(3\log x + 1) + x^2 \times \frac{3}{x}$

$= 6x\log x + 2x + 3x$

$= \underline{x(6\log x + 5)}$

$g''(x) = \frac{(2x)'\sqrt{1-x^4} - 2x \times (\sqrt{1-x^4})'}{(\sqrt{1-x^4})^2}$

$= \frac{2\sqrt{1-x^4} - 2x \times \frac{1}{2}\frac{-4x^3}{\sqrt{1-x^4}}}{(1-x^4)}$

$= \frac{2(1-x^4) + 4x^4}{(1-x^4)^{\frac{3}{2}}}$

$= \underline{\frac{2(1+x^4)}{(1-x^4)^{\frac{3}{2}}}}$

④

問5.

(1)

$$g^{(n)}(y) = \begin{cases} \cos y & (n=4k) \\ -\sin y & (n=4k+1) \\ -\cos y & (n=4k+2) \\ \sin y & (n=4k+3) \end{cases}$$

$$g^{(n)}(0) = \begin{cases} 1 & (n=4k) \\ 0 & (n=4k+1) \\ -1 & (n=4k+2) \\ 0 & (n=4k+3) \end{cases}$$ であるから,

$$g(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k)!} x^{4k} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k+2)!} x^{4k+2}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

(2)

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = -1 + 2\cos^2 x$$

$$\therefore \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

(3)

$$f(x) = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}(2x)^{2n}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(1+1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} 2^{2n-1} \cdot x^{2n}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}$$