100点満点

微積分解法２０１５　中間試験（６月１２日（金））

問１ 次の極限値をもとめなさい。

20

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{3n+4}+5}$, 　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n+2})$.

10　10

問２ 次の極限値をもとめなさい。

20

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}$, 　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^5-1}{x-1}$.

10　10

20 **問３** 関数 $f(x)=|x|$ に関する次の問いに答えなさい。

（１） $y=f(x)$ のグラフを描きなさい。 10

（２） 関数 $f(x)$ は、$x=0$ で微分可能でないことを示しなさい。

つまり、次の極限が存在しないことを示しなさい。

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}.$$

10

問４ 関数 $f(x), g(x)$ を次で定義する。

20

$$f(x)=\log(\log 2x),\qquad g(x)=\mathrm{Arcsin}x+\sqrt{1-x^2}.$$

5　5

（１）関数 $f(x), g(x)$ の導関数 $f'(x), g'(x)$ を求めなさい。

（２）関数 $f(x), g(x)$ の２次導関数 $f''(x), g''(x)$ を求めなさい。

5　5

問５ 関数 $f(x)=\frac{1}{(1-x)^3}$ に関する以下の問いに答えなさい。

20

（１）関数 $f(x)$ の n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ を求めなさい。 10

（２）関数 $f(x)$ のマクローリン展開（$x=0$ を中心としたテイラー展開）を求めなさい。

なお、剰余項がゼロに収束することは示さなくて良い。

10

（解答例）

問1.

(1)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{3n+4}+5}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{\sqrt{n}}}{\sqrt{3+\frac{4}{n}}+\frac{5}{\sqrt{n}}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

(2)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n+2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+3}-\sqrt{n+2})(\sqrt{n+3}+\sqrt{n+2})}{(\sqrt{n+3}+\sqrt{n+2})}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+3)-(n+2)}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+2}}=0$$

問2

(1)

$$\frac{x}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}$$

$$=\frac{x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}{(\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x})(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}$$

$$=\frac{(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})x}{(2+x)-(2-x)}$$

$$=\frac{(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})x}{2x}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)$$

よって $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}=\frac{1}{2}2\sqrt{2}=\sqrt{2}$

(2)

$x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$ であるから、

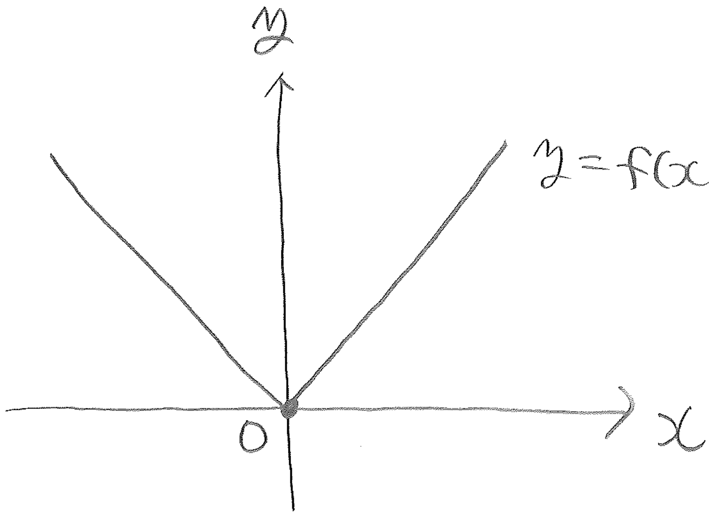
$$\frac{x^5-1}{x-1}=x^4+x^3+x^2+x+1.$$

よって

$$\lim_{x\to1}\frac{x^5-1}{x-1}=1+1+1+1+1=5$$

問3.

(1)



(2)

$$\lim_{x\to+0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to+0}\frac{x-0}{x-0}=\lim_{x\to+0}1=1$$

$$\lim_{x\to-0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to-0}\frac{-x-0}{x-0}=\lim_{x\to-0}(-1)=-1$$

極限のとり方で極限値が異なる。

つまり、極限 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ は存在しない。

問4.

(1) $f'(x) = \dfrac{1}{\log 2x}(\log 2x)'$

$= \dfrac{1}{\log 2x} \times \dfrac{1}{2x} \times 2$

$= \underline{\dfrac{1}{x\log 2x}}$

$g'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{1}{2}\dfrac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}$

$= \dfrac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} = \underline{\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}}$

(2) $f''(x) = \dfrac{-1}{(x\log 2x)^2}(x\log 2x)'$

$= \dfrac{-1}{(x\log 2x)^2}\left(\log 2x + x \cdot \dfrac{1}{2x} \times 2\right)$

$= \dfrac{-1}{(x\log 2x)^2}(\log 2x + 1)$

$g''(x) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{-\frac{1}{2}} \times \dfrac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}$

$= (-1) \times \left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{(1+x)^2}$

$= -\dfrac{1}{\sqrt{1-x}\,\sqrt{1+x}^{\,3}}$

$= -\dfrac{1}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}$

問5

(1) $f'(x)=(-3)\frac{(-1)}{(1-x)^4}=\frac{3}{(1-x)^4}$

$f''(x)=(-4)\frac{(-1)}{(1-x)^5}\times 3=\frac{4\cdot 3}{(1-x)^5}$

$f^{(3)}(x)=(-5)\frac{(-1)}{(1-x)^6}\,4\cdot 3=\frac{5\cdot 4\cdot 3}{(1-x)^6}$

これより、

$$\underline{f^{(n)}(x)=\frac{(n+2)!}{2!}\frac{1}{(1-x)^{n+3}}} \quad \text{---}(☆)$$

と予想され、実際に、$f^{(n)}(x)$の予想(☆)をもう一回微分すると、

$$\frac{(n+2)!}{2!}(-1)(n+3)\frac{(-1)}{(1-x)^{n+4}}$$

$$=\frac{(n+3)!}{2!}\frac{1}{(1-x)^{n+4}}$$

となる。よって帰納法により、(☆)が示された。

(2) (1)より、

$$f^{(n)}(0)=\frac{(n+2)!}{2!}.$$

これを、テイラー展開に代入すると、

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{(n+2)!}{2!}x^n$$

$$\underline{=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+2)(n+1)}{2}x^n}$$