２０１４年度・数学Ｉ期末試験

問１ 次の累次積分の積分順序を交換しなさい。ただし、$f(x,y)$ は連続関数とする。

$$\int_0^1 \left(\int_{x^2}^1 f(x,y)dy \right) dx.$$

問２ 次の重積分の値を求めなさい。ただし、積分領域は $D = \{(x,y) | 0 \leqq x \leqq 1, 0 \leqq y \leqq x\}$ とする。

$$\int\int_D e^{y/x} dxdy.$$

ヒント：y について先に積分する。

問３ (1) 極座標変換 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$ のヤコビアンの値を求めなさい。

(2) 次の重積分の値を求めなさい。ただし、積分領域は $D = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leqq R^2, x, y \geqq 0\}$ で、$R \geq 0$ とする。

$$\int\int_D x\sqrt{x^2+y^2} dxdy.$$

問４ 次の重積分の値を求めなさい。ただし、積分領域は $D = \{(x,y,z) | x+y+z \leqq 1; x,y,z \geqq 0\}$ とする。

$$\int\int\int_D (2x+3y+xz) dxdydz.$$

問５ (1) 極座標変換 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\varphi\cos\theta \\ r\sin\varphi\sin\theta \\ r\cos\varphi \end{pmatrix}$ のヤコビアンの値を求めなさい。

(2) 次の重積分の値を求めなさい。ただし、積分領域は $D = \{(x,y,z) | x^2+y^2+z^2 \leqq 1\}$ とする。

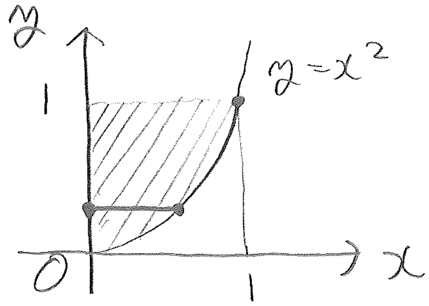
$$\int\int\int_D (x^2+y^2+z^2) dxdydz.$$

数学I 解答

問1.

積分領域Dは,

$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1\}$.



xとyを入れかえると,

$D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq \sqrt{y}\}$.

よって

$$\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{y}} f(x, y)\, dx \right) dy$$

問2.

累次積分に直して計算する。

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^x e^{y/x}\, dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left[x e^{y/x} \right]_{y=0}^{y=x} dx$$

$$= \int_0^1 x(e-1)\, dx$$

$$= (e-1) \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{x=0}^{x=1}$$

$$= \underline{\frac{1}{2}(e-1)}$$

問3.

(1) ヤコビアンは,

$$J(r,\theta) = \det\begin{pmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = \underline{r}$$

(2) 変数変換公式により,極座標に変換すると,

$$I = \iint_{D'} r\cos\theta \times r \times r \, dr d\theta = \iint_{D'} r^3 \cos\theta \, dr d\theta,$$

$$D' = \{ (r,\theta) \mid 0 \leq r \leq R,\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \}.$$

変数分離して,

$$I = \int_0^R r^3 dr \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \, d\theta$$

$$= \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R \times \left[\sin\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \underline{\frac{R^4}{4}}$$

問4.

積分領域は、次のように書ける。

$$D=\{(x,y,z)\mid 0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq 1-x,\ 0\leq z\leq 1-x-y\}$$

累次積分に直すと、

$$I=\int_0^1\left(\int_0^{1-x}\left(\int_0^{1-x-y}(2x+3y+xz)\,dz\right)dy\right)dx$$

$$=\int_0^1\left(\int_0^{1-x}\left[(2x+3y)z+\frac{x}{2}z^2\right]_{z=0}^{z=1-x-y}dy\right)dx$$

$$=\int_0^1\left(\int_0^{1-x}\left\{(2x+3y)+\frac{x}{2}(1-x-y)\right\}(1-x-y)\,dy\right)dx$$

$$=\int_0^1\left(\int_0^{1-x}\left\{\left(\frac{5}{2}x-3x^2+\frac{x^3}{2}\right)+(x^2-6x+3)y\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(\frac{x}{2}-3\right)y^2\right\}dy\right)dx$$

$$=\int_0^1\left\{\left(\frac{5}{2}x-3x^2+\frac{x^3}{2}\right)(1-x)\right.$$

$$\left.+(x^2-6x+3)\frac{(1-x)^2}{2}+\left(\frac{x}{2}-3\right)\frac{(1-x)^3}{3}\right\}dx$$

$$=\int_0^1\frac{1}{6}(3-2x-6x^2+6x^3-x^4)\,dx$$

$$=\frac{1}{6}\left[3x-x^2-2x^3+\frac{3}{2}x^4-\frac{x^5}{5}\right]_{x=0}^{x=1}=\underline{\frac{13}{60}}$$

4

問5

(1) ヤコビアン $J(r,\varphi,\theta) = \det \begin{bmatrix} \sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \end{bmatrix}$

3列目を軸に展開すると、

$$J(r,\varphi,\theta) = (-1)^{3+1}(-r\sin\varphi\sin\theta)\det\begin{bmatrix} \sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta \\ \cos\varphi & -r\sin\varphi \end{bmatrix}$$

$$+(-1)^{3+2}(r\sin\varphi\cos\theta)\det\begin{bmatrix} \sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & -r\sin\varphi \end{bmatrix}$$

$$= (-r\sin\varphi\sin\theta)(-r\underline{\sin^2\varphi}\sin\theta - r\underline{\cos^2\varphi}\sin\theta)$$

$$- r\sin\varphi\cos\theta(-r\underline{\sin^2\varphi}\cos\theta - r\underline{\cos^2\varphi}\cos\theta)$$

$$= r^2\sin\varphi(\sin^2\theta + \cos^2\theta)$$

$$= \underline{r^2\sin\varphi}$$

(2) 極座標変換 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\varphi\cos\theta \\ r\sin\varphi\sin\theta \\ r\cos\varphi \end{pmatrix}$ により、

$D = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$ は、

$D' = \{(r,\varphi,\theta) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$

に写る。

ヤコビアンは $J(r,\varphi,\theta) = r^2\sin\varphi$

であるから、

変数変換公式により,

$$I = \iiint_{D1} r^2 \times r^2 \sin\varphi \; dr\,d\varphi\,d\theta$$

$$= \iiint_{D1} r^4 \sin\varphi \; dr\,d\varphi\,d\theta .$$

変数分離して,

$$I = \int_0^1 r^4\,dr \times \int_0^{\pi} \sin\varphi\,d\varphi \times \int_0^{2\pi} 1\,d\theta$$

$$= \left[\frac{r^5}{5}\right]_0^1 \times \left[-\cos\varphi\right]_0^{\pi} \times \left[\theta\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{5} \times 2 \times 2\pi = \underline{\frac{4}{5}\pi}$$