数学Ｉ中間試験（平成２６年６月１９日、機械、１２９名）

問１　次の関数 $f(x,y)$ の２次までの偏導関数 $f_x, f_y,\ f_{x,x}, f_{x,y}, f_{y,x}, f_{y,y}$ を求めなさい。ただし、$a>0$ とする。

$$f(x,y)=a^{xy}.$$

問２　次の曲面上の点Ｐにおける接平面を求めよ。

$$z=f(x,y)=\frac{x+y}{1+y},\quad \mathrm{P}(2,3,f(2,3)).$$

問３ 関数 $f(x,y)$ は C^2 級とする。合成関数 $g(t)=f(a+ut,b+vt)$ の微分 $\frac{dg}{dt}$, $\frac{d^2g}{dt^2}$ を求めなさい。

問４ 次の関数 $z=f(x,y)$ について以下の問いに答えなさい。

$$f(x,y)=4x^2e^y-2x^4-e^{4y}.$$

（１）臨界点 $f_x=f_y=0$ を全て求めなさい。（ヒント：２点）

（２）（１）で求めた臨界点は、極大、極小、鞍点のいずれか調べなさい。

問５　次の関数 $f(x,y)$ が原点 $(0,0)$ で連続かどうかを調べよ。

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2+y^4}{x^4+y^2} & (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

問６ 関数 $f(x,y)$ は C^2 級とする。極座標変換した合成関数を $g(r,\theta)=f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ とする。

（１）偏導関数 g_r, g_θ を求めなさい。

（２）２次偏導関数 $g_{r,\theta}$ を求めなさい。

数学I　解答

問1.

$$f_x = y\log a \cdot a^{xy}$$
$$f_y = x\log a \cdot a^{xy}$$
$$f_{x,x} = y^2(\log a)^2 a^{xy}$$
$$f_{y,y} = x^2(\log a)^2 a^{xy}$$
$$f_{x,y} = f_{y,x} = (\log a + xy(\log a)^2)a^{xy}$$

問2.

$$f_x = \frac{1}{1+y},\quad f_y = \frac{(1-x)}{(1+y)^2}$$

$$f_x(2,3) = \frac{1}{4},\quad f_y(2,3) = -\frac{1}{16},\quad f(2,3) = \frac{5}{4}.$$

接平面は、

$$z - \frac{5}{4} = \frac{1}{4}(x-2) - \frac{1}{16}(y-3)$$

変形して.

$$\underline{\frac{1}{4}x - \frac{1}{16}y - z + \frac{15}{16} = 0}$$

問3.　Chain-Ruleにより.

$$\frac{dg}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}u + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot v$$

$$\frac{d^2g}{dt^2} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}u + \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}v\right)u + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}u + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}v\right)\cdot v$$

$$= u^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2uv\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + v^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

問4

(1) $\begin{cases} f_x = 8xe^y - 8x^3 = 0 \\ f_y = 4x^2e^y - 4e^{4y} = 0 \end{cases}$ を解く.

$x^2 = e^y,\ x^2 = e^{3y}$ をみたすのは、$(x,y) = (+1,0), (-1,0)$

(2) $f_{xx} = 8e^y - 24x^2$

$f_{yy} = 4x^2e^y - 16e^{4y}$

$f_{xy} = f_{yx} = 8xe^y$

・$(1,0)$におけるヘシアンは、

$$H(1,0) = \det\begin{pmatrix} -16 & 8 \\ 8 & -12 \end{pmatrix} = 128 > 0.$$

$f_{xx}(1,0) = -16 < 0$ であるから、

極値判定定理により、$(1,0)$は極大

・$(-1,0)$におけるヘシアンは、

$$H(-1,0) = \det\begin{pmatrix} -16 & -8 \\ -8 & -12 \end{pmatrix} = 128 > 0.$$

$f_{xx}(-1,0) = -16 < 0$ であるから、

極値判定定理により、$(-1,0)$は極大

問5、直線 $y=x$ 上で $(0,0)$に近づける.

$$f(x,x) = \frac{x^2+x^4}{x^4+x^2} = 1.$$

よって $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ y=x}} f(x,y) = 1 \neq 0 = f(0,0).$

連続ではない.

問6.

(1) Chain-Rule により、

$$g_r = f_x \cos\theta + f_y \sin\theta$$

$$g_\theta = f_x(-r\sin\theta) + f_y\, r\cos\theta$$

(2) Leibnitz-Rule により

$$g_{r,\theta} = \frac{\partial}{\partial\theta}(f_x)\cos\theta - f_x\sin\theta + \frac{\partial}{\partial\theta}(f_y)\sin\theta + f_y\cos\theta$$

Chain-Rule により

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(f_x) = f_{x,x}(-r\sin\theta) + f_{x,y}\, r\cos\theta$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(f_y) = f_{y,x}(-r\sin\theta) + f_{y,y}\, r\cos\theta$$

まとめて

$$g_{r,\theta} = (-r\sin\theta f_{xx} + r\cos\theta f_{x,y})\cos\theta - \sin\theta\cdot f_x + (-r\sin\theta f_{y,x} + r\cos\theta f_{yy})\sin\theta + \cos\theta f_y$$

$$= -r\sin\theta\cos\theta\cdot f_{x,x} - \sin\theta\cdot f_x + r\sin\theta\cos\theta\cdot f_{y,y} + \cos\theta\cdot f_y + r\cos 2\theta\cdot f_{xy}$$

$$= -\frac{r}{2}\sin 2\theta\cdot f_{xx} + \frac{r}{2}\sin 2\theta\cdot f_{yy} + r\cos 2\theta\cdot f_{xy} - \sin\theta\cdot f_x + \cos\theta\cdot f_y$$