数学Ｉ中間試験（平成２６年６月１８日、バイオ・物質、１０７名）

問１　次の関数 $f(x,y)$ の２次までの偏導関数 f_x, f_y, $f_{x,x}, f_{x,y}, f_{y,x}, f_{y,y}$ を求めなさい。ただし、$x+y \neq 0$ とする。

$$f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}.$$

問２　次の曲面上の点 P における接平面を求めよ。

$$z = f(x,y) = \cos(xy), \quad \mathrm{P}\left(1, \frac{\pi}{2}, 0\right).$$

問３ 関数 $f(x,y)$ は C^2 級とする。合成関数 $g(\theta) = f(\cos\theta, \sin\theta)$ の微分 $\frac{dg}{d\theta}$, $\frac{d^2g}{d\theta^2}$ を求めなさい。

問４ 次の関数 $z = f(x,y)$ について以下の問いに答えなさい。

$$f(x,y) = e^{-x^2+y^2-2y}.$$

（１）臨界点 $f_x = f_y = 0$ を求めなさい。

（２）（１）で求めた臨界点は、極大、極小、鞍点のいずれか調べなさい。

問５　次の関数 $f(x,y)$ が原点 $(0,0)$ で連続かどうかを調べよ。

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

問６ 関数 $f(x,y)$ は C^2 級とする。極座標変換した合成関数を $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ とする。

（１）偏導関数 g_r, g_θ を求めなさい。

（２）２次偏導関数 $g_{r,\theta}$ を求めなさい。

数学I 解答

問1.

$$f_x = \frac{2y}{(x+y)^2}$$

$$f_y = -\frac{2x}{(x+y)^2}$$

$$f_{xx} = -\frac{4y}{(x+y)^3}$$

$$f_{yy} = \frac{4x}{(x+y)^3}$$

$$f_{xy} = f_{yx} = \frac{2(x-y)}{(x+y)^3}.$$

問2.

$$f_x = -y\sin(xy) \quad , f_y = -x\sin(xy)$$

$$f_x(1,\tfrac{\pi}{2}) = -\tfrac{\pi}{2}\sin(\tfrac{\pi}{2}) = -\tfrac{\pi}{2}$$

$$f_y(1,\tfrac{\pi}{2}) = -\sin(\tfrac{\pi}{2}) = -1$$

$$f(1,\tfrac{\pi}{2}) = \cos(\tfrac{\pi}{2}) = 0$$

接平面は、

$$z - 0 = -\frac{\pi}{2}(x-1) - (y - \frac{\pi}{2})$$

$$\underline{\frac{\pi}{2}x + y + z - \pi = 0}$$

問3. Chain-Ruleにより、

$$\underline{\frac{dg}{d\theta} = \frac{\partial f}{\partial x}(-\sin\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\theta}$$

$$\frac{d^2g}{d\theta^2} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-\sin\theta) + \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\cos\theta\right)(-\sin\theta)$$

$$-\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}$$

つづく

$$+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-\sin\theta)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot\cos\theta\right)\cos\theta$$

$$-\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$=\sin^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\cos^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\sin 2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}-\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}-\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}$$

問4、

(1)

$$f_x=-2xe^{-x^2+y^2-2y}=0$$

$$f_y=(2y-2)e^{-x^2+y^2-2y}=0$$

をみたすのは、 $(x,y)=(0,1)$ のみ.

(2)

$$\begin{cases} f_{x,x}=-2e^{-x^2+y^2-2y}-2x(-2x)e^{-x^2+y^2-2y} \\ \quad =(-2+4x^2)e^{-x^2+y^2-2y} \\ f_{x,y}=f_{y,x}=(-2x)(2y-2)e^{-x^2+y^2-2y} \\ f_{y,y}=\{2+(2y-2)^2\}e^{-x^2+y^2-2y} \\ \quad =(6+4y^2-8y)e^{-x^2+y^2-2y} \end{cases}$$

ヘシアン $H(0,1)=\det\begin{pmatrix}(-2)e^{-1} & 0 \\ 0 & 2e^{-1}\end{pmatrix}=-4e^{-2}<0$

よって 極値判定定理により、 $(0,1)$は鞍点.

問5、

極座標変換 $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r\cos\theta\\r\sin\theta\end{pmatrix}$ を考える。

$$f(r\cos\theta,r\sin\theta)=\frac{r^2\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}}=\frac{1}{2}\sin 2\theta$$

$$\lim_{r\to 0}f(r\cos\theta,r\sin\theta)=\frac{1}{2}\sin 2\theta\neq 0$$

よって 連続ではない.

問6.

(1) Chain-Ruleにより、

$$g_r = f_x \cos\theta + f_y \sin\theta$$

$$g_\theta = f_x(-r\sin\theta) + f_y r\cos\theta$$

(2) Leibnitz-Ruleにより、

$$g_{r,\theta} = \frac{\partial}{\partial\theta}(f_x)\cos\theta - f_x\sin\theta + \frac{\partial}{\partial\theta}(f_y)\sin\theta + f_y\cos\theta$$

Chain-Ruleにより、

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(f_x) = f_{x,x}(-r\sin\theta) + f_{x,y}\, r\cos\theta$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(f_y) = f_{y,x}(-r\sin\theta) + f_{y,y}\, r\cos\theta$$

まとめて

$$g_{r,\theta} = (-r\sin\theta f_{xx} + r\cos\theta f_{x,y})\cos\theta - \sin\theta\cdot f_x + (-r\sin\theta f_{y,x} + r\cos\theta f_{yy})\sin\theta + \cos\theta f_y$$

$$= -r\sin\theta\cos\theta\cdot f_{x,x} - \sin\theta\cdot f_x + r\sin\theta\cos\theta\cdot f_{y,y} + \cos\theta\cdot f_y + r\cos 2\theta\cdot f_{xy}$$

もちろん

$r\cos^2\theta\, f_{x,y} - r\sin^2\theta\, f_{y,x}$ のままでも良い。