数学Ｉ中間試験（平成２６年６月１８日、機能高分子、１２０名）

問１　次の関数 $f(x,y)$ の２次までの偏導関数 f_x, f_y, $f_{x,x}, f_{x,y}, f_{y,x}, f_{y,y}$ を求めなさい。ただし、$a, b \in \mathbf{R}$ とする。

$$f(x,y) = e^{ax^2+by^2}.$$

問２　次の曲面上の点Ｐにおける接平面を求めよ。

$$z = f(x,y) = xy + 3xy^2, \quad \mathrm{P}(1,1,4).$$

問３ 関数 $f(x,y,z)$ は C^1 級とする。極座標 $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$ への変数変換を考える。合成関数 $g(r,\theta,\varphi) = f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$ の偏微分 g_r, g_θ, g_φ を求めなさい。

問４ 次の関数 $z = f(x,y)$ について以下の問いに答えなさい。

$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - x - y + 3.$$

（１）臨界点 $f_x = f_y = 0$ を求めなさい。

（２）（１）で求めた臨界点は、極大、極小、鞍点のいずれか調べなさい。

問５　次の関数 $f(x,y)$ が原点 $(0,0)$ で連続かどうかを調べよ。

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

問６ 関数 $f(x,y)$ は C^2 級とする。極座標変換した合成関数を $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ とする。

（１）偏導関数 g_r, g_θ を求めなさい。

（２）２次偏導関数 $g_{r,\theta}$ を求めなさい。

数工 解答

問1.

$$f_x = 2ax e^{ax^2+by^2}$$
$$f_y = 2by e^{ax^2+by^2}$$

$$f_{x,x} = 2a e^{ax^2+by^2} + 4a^2x^2 e^{ax^2+by^2}$$
$$= 2a(1+2ax^2) e^{ax^2+by^2}$$

$$f_{y,y} = 2b(1+2by^2) e^{ax^2+by^2}$$

$$f_{x,y} = f_{y,x} = 4abxy\, e^{ax^2+by^2}$$

問2、

$$f_x = y+3y^2$$
$$f_y = x+6xy$$

$$f_x(1,1) = 4,\ f_y(1,1) = 7,\ f(1,1) = 4.$$

よって接平面は、

$$z-4 = 4(x-1)+7(y-1)$$

$$\underline{4x+7y-7-z=0}$$

問3、 Chain-Ruleにより、

$$g_r = f_x \sin\theta\cos\varphi + f_y \sin\theta\sin\varphi + f_z \cos\theta$$
$$g_\theta = f_x\, r\cos\theta\cos\varphi + f_y\, r\cos\theta\sin\varphi - f_z\, r\sin\theta$$

$$g_\varphi = f_x(-r\sin\theta\sin\varphi) + f_y\, r\sin\theta\cos\varphi.$$

問4、

(1)

$$f_x = 2x + y - 1 = 0$$
$$f_y = 2y + x - 1 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{4-1}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{x = y = \frac{1}{3}}$$

(2)

$f_{xx} = 2$, $f_{xy} = f_{yx} = 1$, $f_{yy} = 2$ より、

ヘシアン $H(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0$

極値判定定理により、

$H(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) > 0$, $f_{xx} = 2 > 0$ から、

$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ で <u>極小</u>

問5、

・y軸上で(0,0)に近づける。

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ x=0}} f(x,y) = \lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} 1 = 1 \neq 0 = f(0,0)$$

よって <u>連続ではない。</u>

問6.

(1) Chain-Rule により、

$$g_r = f_x \cos\theta + f_y \sin\theta$$

$$g_\theta = f_x(-r\sin\theta) + f_y\, r\cos\theta$$

(2) Leibnitz-Rule により、

$$g_{r,\theta} = \frac{\partial}{\partial\theta}(f_x)\cos\theta - f_x\sin\theta + \frac{\partial}{\partial\theta}(f_y)\sin\theta + f_y\cos\theta$$

Chain-Rule により、

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(f_x) = f_{x,x}(-r\sin\theta) + f_{x,y}\, r\cos\theta$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(f_y) = f_{y,x}(-r\sin\theta) + f_{y,y}\, r\cos\theta$$

まとめて

$$g_{r,\theta} = (-r\sin\theta f_{xx} + r\cos\theta f_{x,y})\cos\theta - \sin\theta\cdot f_x + (-r\sin\theta f_{y,x} + r\cos\theta f_{yy})\sin\theta + \cos\theta f_y$$

$$= -r\sin\theta\cos\theta\cdot f_{x,x} - \sin\theta\cdot f_x + r\sin\theta\cos\theta\cdot f_{y,y} + \cos\theta\cdot f_y + r\cos 2\theta\cdot f_{xy}$$

$$= -\frac{r}{2}\sin 2\theta\cdot f_{xx} + \frac{r}{2}\sin 2\theta\cdot f_{yy} + r\cos 2\theta\cdot f_{xy} - \sin\theta\cdot f_x + \cos\theta\cdot f_y$$