数学Ｉ中間試験（平成２５年６月２０日、機械、１２８名）

問１ 30 （１）次の関数 $f(x,y)$ の第２次までの偏導関数 $f_x, f_y, f_{x,x}, f_{x,y}, f_{y,x}, f_{y,y}$ を全て求めよ。

$$f(x,y) = \frac{x-y}{x+y} \quad \text{for} \quad x+y \neq 0. \qquad 18 = 3 \times 6$$

（２）関数 $z = f(x,y) = \sin(2x-3y)$ の全微分を求めよ。

12

問２ 20 関数 $z = f(x,y)$ は C^1 級とする。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

合成関数の微分 z_u, z_v を f_x, f_y を用いて表せ。

問３ 20 次の関数の極値を調べよ。

$$f(x,y) = 3x^2 + 3xy + 2y^3.$$

問４ 10 次の関数 $f(x,y)$ が原点 $(0,0)$ で変数 x, y について偏微分可能かどうかを調べよ。

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

20 問５ 関数 $f(x,y)$ は C^2 級とする。極座標変換した合成関数を $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ とする。

（１）偏導関数 g_r, g_θ を f_x, f_y を用いて表せ。 $10 = 5 \times 2$

（２）第２次偏導関数 $g_{r,r}$, $g_{\theta,\theta}$ を $f_x, f_y, f_{x,x}, f_{y,y}, f_{x,y}$ を用いて表せ。 $6 = 3 \times 2$

（３）問（１）（２）を用いて、次の式を示せ。 4

$$f_{x,x} + f_{y,y} = g_{r,r} + \frac{1}{r} g_r + \frac{1}{r^2} g_{\theta,\theta}.$$

解答

問1. (1)

30

$$f_x = \frac{2y}{(x+y)^2}$$

$$f_y = \frac{-2x}{(x+y)^2}$$

$$f_{xx} = \frac{-4y}{(x+y)^3}$$

$3 \times 6 = 18$

$$f_{yy} = \frac{4x}{(x+y)^3}$$

$$f_{xy} = f_{yx} = \frac{2(x-y)}{(x+y)^3}$$

(2) $z = f(x, y)$ は C^∞ 級で全微分可能、

$f_x = 2\cos(2x-3y)$

$f_y = -3\cos(2x-3y)$

12

全微分は $dz = 2\cos(2x-3y)\,dx - 3\cos(2x-3y)\,dy$

問2.

20

Chain-Rule により、

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta$$

10×2

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(-\sin\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\theta$$

問3、
2)

$$\begin{cases} f_x = 6x + 3y = 0 & \text{—①} \\ f_y = 3x + 6y^2 = 0 & \text{—②} \end{cases}$$

①$-$ 2×② を考えると、 $y = 0, +\frac{1}{4}$。

①と②が成立するのは、 $(x, y) = (0, 0), \left(-\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right)$.

3 3

さて

$f_{xx} = 6$, $f_{yy} = 12y$, $f_{xy} = f_{yx} = 3$

であるから

ヘシアンは $H(0,0) = \det\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = -9 < 0$, 4

$H\left(-\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right) = \det\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = 9 > 0$. 4

よって

$(x, y) = (0, 0)$ で鞍点. 3

$f_{xx}\left(-\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right) = 6 > 0$ であるから

$(x, y) = \left(-\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right)$ で

極小値 $f\left(-\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{64}$ をとる。 3

問4. 10

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{h(h^2-0^2)}{h^2+0^2} - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h}$$

5×2

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{0(0^2-h^2)}{0^2+h^2} - 0}{h} = 0$$

よって 変数 x, y どちらについても偏微分可能.

問5.20 ⑤

(1) Chain-Rule により、

$g_r = f_x \cos\theta + f_y \sin\theta$, 5×2=10

$g_\theta = f_x(-r\sin\theta) + f_y \, r\cos\theta$.

(2) Chain-Rule により、

$$\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial g}{\partial r}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$= \cos\theta\left(\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right) + \sin\theta\left(\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + \sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$$

3×2=6

$$= \cos^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + \sin^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} = \frac{\partial}{\partial\theta}\left(-r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$= -r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x} - r\sin\theta\left(-r\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + r\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right)$$

$$- r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y} + r\cos\theta\left(-r\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + r\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$$

$$= r^2\sin^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + r^2\cos^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2r^2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$$

$$- r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x} - r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}$$

(3) 右辺 $g_{r,r} + \frac{1}{r}g_r + \frac{1}{r^2}g_{\theta,\theta}$ に g_r, $g_{r,r}$, $g_{\theta,\theta}$ を代入すると、

4

$g_{rr} + \frac{1}{r}g_r + \frac{1}{r^2}g_{\theta\theta}$

$= f_{x,x}(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + f_{y,y}(\sin^2\theta + \cos^2\theta) + f_{x,y}(2\sin\theta\cos\theta - 2\sin\theta\cos\theta)$

$+ f_x\left(-\frac{\cos\theta}{r} + \frac{\cos\theta}{r}\right) + f_y\left(-\frac{\sin\theta}{r} + \frac{\sin\theta}{r}\right)$

$= f_{x,x} + f_{y,y}$