数学Ｉ中間試験（平成２５年６月１９日、物質、バイオ　１３２名）

問１ 30（１）次の関数 $f(x,y)$ の第２次までの偏導関数 $f_x, f_y, f_{x,x}, f_{x,y}, f_{y,x}, f_{y,y}$ を全て求めよ。

$$f(x,y) = \sin(x^2y^3).$$

3×6=18

（２）関数 $z = f(x,y) = x^2y$ の全微分を求めよ。 12

20 問２ 関数 $z = f(x,y)$ は C^1 級とする。$x = uv, y = \frac{1}{u^2+v^2+1}$ のとき、合成関数の微分 z_u, z_v を f_x, f_y を用いて表せ。

10×2=20

問３ 20 次の関数の極値を調べよ。

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy.$$

問４ 10 次の関数 $f(x,y)$ が原点 $(0,0)$ で連続かどうかを調べよ。

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

20 問５ 関数 $f(x,y)$ は C^2 級とする。極座標変換した合成関数を $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ とする。

（１）偏導関数 g_r, g_θ を f_x, f_y を用いて表せ。 5×2=10

（２）第２次偏導関数 $g_{r,r}$, $g_{\theta,\theta}$ を $f_x, f_y, f_{x,x}, f_{y,y}, f_{x,y}$ を用いて表せ。 3×2=6

（３）問（１）（２）を用いて、次の式を示せ。 4

$$f_{x,x} + f_{y,y} = g_{r,r} + \frac{1}{r}g_r + \frac{1}{r^2}g_{\theta,\theta}.$$

1

問1、

(1)

$f_x = 2xy^3\cos(x^2y^3)$

$f_y = 3x^2y^2\cos(x^2y^3)$

$f_{xx} = 2y^3\cos(x^2y^3) - 4x^2y^6\sin(x^2y^3)$

$f_{yy} = 6x^2y\cos(x^2y^3) - 9x^4y^4\sin(x^2y^3)$

$f_{xy} = f_{yx} = 6xy^2\cos(x^2y^3) - 6x^3y^5\sin(x^2y^3)$.

$3\times 6 = 18$

(2)

$f(x,y)$はC^∞級で全微分可能、

$f_x = 2xy$

$f_y = x^2$

12

よって全微分

$dz = 2xy\,dx + x^2\,dy$

②

問2.

Chain-Ruleにより

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$= v\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{-2u}{(u^2+v^2+1)^2}\frac{\partial f}{\partial y}$$

10

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

10

$$= u\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{-2v}{(u^2+v^2+1)^2}\frac{\partial f}{\partial y}$$

問3、

$$\begin{cases} f_x = 3x^2 - 3y = 0 & \text{—①} \\ f_y = 3y^2 - 3x = 0 & \text{—②} \end{cases}$$

①を②に代入すると、$x(x^3-1)=0$.
この実数解は $x=0, 1$.
①,②をみたすのは、$(x,y)=(0,0), (1,1)$.

$3\times 2 = 6$

$f_{xx} = 6x$, $f_{yy} = 6y$, $f_{xy} = -3 = f_{yx}$
であるからヘシアンはそれぞれ、

$$H(0,0) = \det\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = -9 < 0$$

$4\times 2 = 8$

$$H(1,1) = \det\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} = 27 > 0$$

また $f_{xx}(1,1) = 6 > 0$ であるから、

$(0,0)$ で鞍点、
$(1,1)$ で極小値 $f(1,1) = -1$ をとる。

$3\times 2 = 6$

問4. 10

極座標 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$ をとる。

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{2r^2\cos\theta\sin\theta}{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}$$

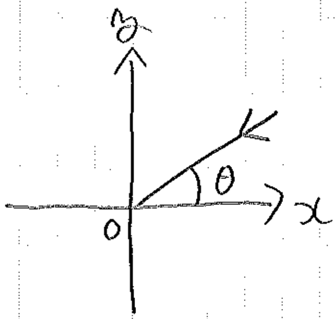
$$= \sin 2\theta.$$

5

よって

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=\tan\theta\cdot x}} f(x,y) = \lim_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \sin(2\theta)$$

極限をとる角度 θ により異なる値に近づく。
つまり、極限値は存在しない。よって原点 $(0,0)$ で連続ではない。



5

問5. 20

⑤

(1) Chain-Rule により、

$g_r = f_x \cos\theta + f_y \sin\theta$,

$g_\theta = f_x(-r\sin\theta) + f_y r\cos\theta$.

5×2 = 10

(2) Chain-Rule により、

$$\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial g}{\partial r}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\cos\theta \frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$= \cos\theta\left(\cos\theta \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \sin\theta \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) + \sin\theta\left(\cos\theta \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \sin\theta \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$$

3×2 = 6

$$= \cos^2\theta \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\sin\theta\cos\theta \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \sin^2\theta \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} = \frac{\partial}{\partial \theta}\left(-r\sin\theta \frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$= -r\cos\theta \frac{\partial f}{\partial x} - r\sin\theta\left(-r\sin\theta \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + r\cos\theta \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right)$$

$$- r\sin\theta \frac{\partial f}{\partial y} + r\cos\theta\left(-r\sin\theta \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + r\cos\theta \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$$

$$= r^2\sin^2\theta \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + r^2\cos^2\theta \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2r^2\sin\theta\cos\theta \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$- r\cos\theta \frac{\partial f}{\partial x} - r\sin\theta \frac{\partial f}{\partial y}$$

(3) 右辺 $g_{r,r} + \frac{1}{r} g_r + \frac{1}{r^2} g_{\theta,\theta}$ に $g_r, g_{r,r}, g_{\theta,\theta}$ を代入すると、

4

$g_{rr} + \frac{1}{r} g_r + \frac{1}{r^2} g_{\theta\theta}$

$= f_{x,x}(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + f_{y,y}(\sin^2\theta + \cos^2\theta) + f_{x,y}(2\sin\theta\cos\theta - 2\sin\theta\cos\theta)$

$+ f_x\left(-\frac{\cos\theta}{r} + \frac{\cos\theta}{r}\right) + f_y\left(-\frac{\sin\theta}{r} + \frac{\sin\theta}{r}\right)$

$= f_{x,x} + f_{y,y}$