数学Ｉ中間試験（平成２５年６月１９日、機能高分子、１２８名）

30 **問１**（１）次の関数 $f(x,y)$ の第２次までの偏導関数 $f_x, f_y, f_{x,x}, f_{x,y}, f_{y,x}, f_{y,y}$ を全て求めよ。 18=3×6

$$f(x,y) = \log(ax^2+by^2) \quad (a,b>0).$$

（２）次の曲面上の点Ｐにおける接平面を求めよ。 12

$$z = x^3y + 4xy^2, \quad \mathrm{P}(1,-1,3).$$

20 **問２** 関数 $z=f(x,y)$ は C^2 級とする。$a,b,c,d \in \mathbf{R}$ とする。$x=a+ct, y=b+dt$ のとき、合成関数の微分 $\frac{dz}{dt}, \frac{d^2z}{dt^2}$ を $f_x, f_y, f_{x,x}, f_{y,y}, f_{x,y}$ を用いて表せ。

20 **問３** 次の関数の極値を調べよ。

$$f(x,y) = e^x(x^2-y^2).$$

10 **問４** 次の関数 $f(x,y)$ が原点 $(0,0)$ で変数 x,y について偏微分可能かどうかを調べよ。

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0), \\ 0 & (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

20 **問５** 関数 $f(x,y)$ は C^2 級とする。極座標変換した合成関数を $g(r,\theta)=f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ とする。

（１）偏導関数 g_r, g_θ を f_x, f_y を用いて表せ。 10=5×2

（２）第２次偏導関数 $g_{r,r}, g_{\theta,\theta}$ を $f_x, f_y, f_{x,x}, f_{y,y}, f_{x,y}$ を用いて表せ。 6=3×2

（３）問（１）（２）を用いて、次の式を示せ。 4

$$f_{x,x}+f_{y,y} = g_{r,r} + \frac{1}{r}g_r + \frac{1}{r^2}g_{\theta,\theta}.$$

（解答）

問1、

(1)

$$f_x = \frac{2ax}{ax^2+by^2}$$

$$f_y = \frac{2by}{ax^2+by^2}$$

$$f_{x,x} = \frac{2a(ax^2+by^2)-2ax\cdot 2ax}{(ax^2+by^2)^2}$$

$$= \frac{2a(by^2-ax^2)}{(ax^2+by^2)^2}$$

$$f_{y,y} = \frac{2b(ax^2-by^2)}{(ax^2+by^2)^2}$$

$$f_{x,y} = f_{y,x}$$

$$= \frac{-2ax\cdot 2by}{(ax^2+by^2)^2}$$

$$= -\frac{4abxy}{(ax^2+by^2)^2}$$

3×6

(2)

$z = x^3y + 4xy^2$ は C^∞ 級で全微分可能.

$$\begin{cases} z_x = 3x^2y + 4y^2 \\ z_y = x^3 + 8xy \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_x(1,-1) = 3(-1)+4 = 1 \\ z_y(1,-1) = 1-8 = -7 \end{cases}$$

接平面は、

$$z = 3 + (x-1) - 7(y+1)$$

$$\underline{z = x - 7y - 5}$$

12

問2.

Chain-Rule により、

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

$$= c\frac{\partial f}{\partial x} + d\frac{\partial f}{\partial y}$$

10

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(c\frac{\partial f}{\partial x} + d\frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

$$= c\left(c\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + d\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) + d\left(c\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + d\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)$$

$$= c^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2cd\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + d^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

10

問3、

$$\begin{cases} f_x = e^x(x^2+2x-y^2) = 0 \\ f_y = e^x(-2y) \quad = 0 \end{cases}$$ は、

$(x, y) = (0, 0), (-2, 0)$ で成立。 3×2

$$\begin{cases} f_{xx} = e^x(x^2+4x-y^2+2) \\ f_{yy} = -2e^x \\ f_{xy} = -2ye^x \end{cases}$$ であるから

ヘシアン $H(x,y) = \det\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix} = 2e^{2x}(-x^2-4x-y^2-2)$.

$H(0,0) = -4 < 0$, $H(-2,0) = 4e^{-4} > 0$ 4×2

$f_{xx}(-2,0) = e^{-2}(-2) < 0$

であるから、

$(x, y) = (0, 0)$ で 鞍点.

$(x, y) = (-2, 0)$ で 極大値 $f(-2,0) = 4e^{-2}$ をとる.

3×2

問4.

$$f_x(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h}$$

$$= \lim \frac{h - 0}{h} = 1$$

5

$$f_y(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

5

xとyの両方で偏微分可能

問5.

(1) Chain-Rule により、

$g_r = f_x \cos\theta + f_y \sin\theta$, 5

$g_\theta = f_x(-r\sin\theta) + f_y\, r\cos\theta$. 5

(2) Chain-Rule により、

$$\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial g}{\partial r}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$= \cos\theta\left(\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right) + \sin\theta\left(\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + \sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$$

$$= \cos^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + \sin^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$ 3

$$\frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2} = \frac{\partial}{\partial\theta}\left(-r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$= -r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x} - r\sin\theta\left(-r\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + r\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right)$$
$$- r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y} + r\cos\theta\left(-r\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + r\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$$

$$= r^2\sin^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + r^2\cos^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2r^2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} - r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x} - r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}$$ 3

(3) 右辺 $g_{r,r} + \frac{1}{r}g_r + \frac{1}{r^2}g_{\theta,\theta}$ に g_r, $g_{r,r}$, $g_{\theta,\theta}$ を代入すると、

$g_{rr} + \frac{1}{r}g_r + \frac{1}{r^2}g_{\theta\theta}$

$= f_{x,x}(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + f_{y,y}(\sin^2\theta + \cos^2\theta) + f_{x,y}(2\sin\theta\cos\theta - 2\sin\theta\cos\theta)$

$+ f_x\left(-\frac{\cos\theta}{r} + \frac{\cos\theta}{r}\right) + f_y\left(-\frac{\sin\theta}{r} + \frac{\sin\theta}{r}\right)$

$= f_{x,x} + f_{y,y}$ 4