平成２４年度・数学Ｉ期末試験

（平成２４年７月２３日３４校時）

問１　次の積分の順序を交換しなさい。

$$(1)\quad \int_0^1 \left(\int_{x^2}^1 f(x,y)dy\right) dx, \quad (2)\quad \int_1^e \left(\int_0^{\log_e x} f(x,y)dy\right) dx.$$

問２　次の積分 J を累次積分に直して計算しなさい。

$$J = \int\int_A xy\ dxdy.$$

ただし、$A = \{(x,y)|x \geqq 0, y \geqq 0, 2x + y \leqq 2\}$.

問３　定積分 $J = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ を以下の誘導に従い導きなさい。

（１）J の２乗 J^2 の積分を極座標変換して計算しなさい。

$$J^2 = \int\int_{\mathbf{R}^2} e^{-x^2-y^2} dxdy.$$

（２）$J > 0$ を示し、これにより $J = \sqrt{\pi}$ を導きなさい。

(注)　関数 e^{-x^2} の不定積分は初等関数では書けないが、定積分 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ は計算できる。

問４　（１）極座標変換 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}$ のヤコビアンを求めなさい。

（２）次の積分を計算しなさい。

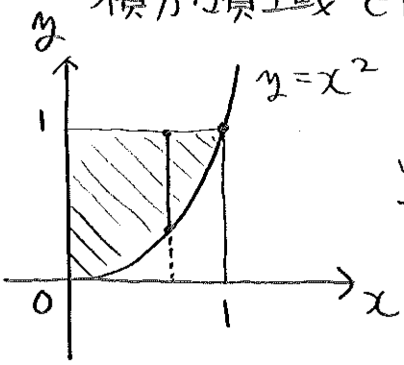
$$K = \int\int\int_A x^n yz\ dxdydz \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots).$$

ただし、$A = \{(x,y,z)|x, y, z \geqq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leqq 1\}$ とする。

テスト解答

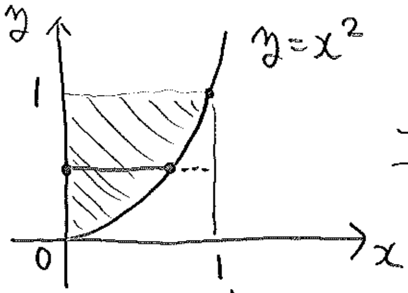
問1.

(1) 積分領域を図示すると、



$$I=\{(x,y)\mid 0\leq x\leq 1,\ 1\leq y\leq x^2\}$$

xとyの立場を入れかえると、

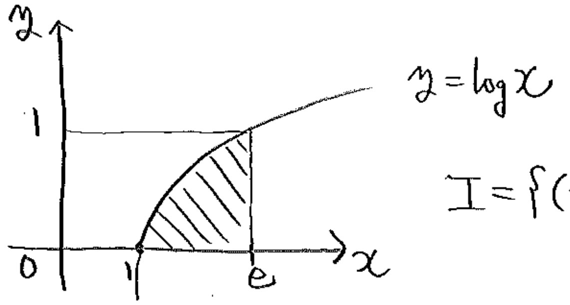


$$I=\{(x,y)\mid 0\leq y\leq 1,\ 0\leq x\leq \sqrt{y}\}$$

よって、

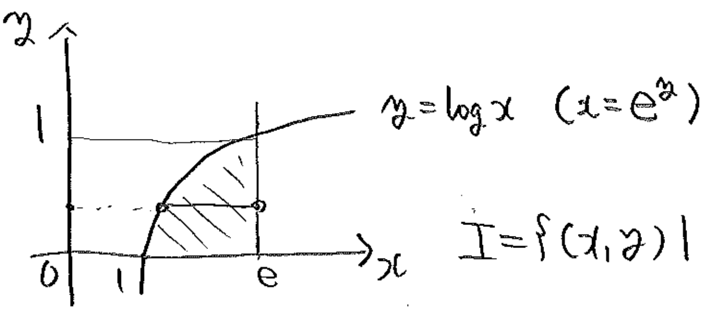
$$\underline{\int_0^1\left(\int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx\right)dy}$$

(2) 積分領域を図示すると、



$$I=\{(x,y)\mid 1\leq x\leq e,\ 0\leq y\leq \log x\}$$

xとyの立場を入れかえると、

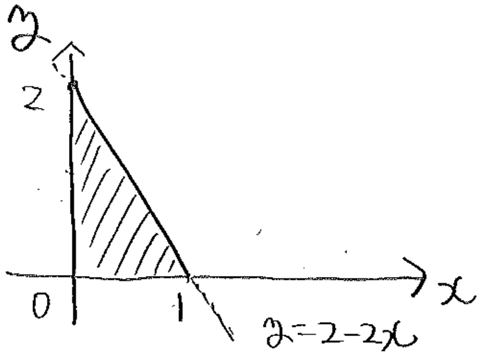


$$I=\{(x,y)\mid 0\leq y\leq 1,\ e^y\leq x\leq e\}$$

よって

$$\underline{\int_0^1\left(\int_{e^y}^{e} f(x,y)\,dx\right)dy}$$

問2. 積分領域Aを図示する.



$A = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 2-2x\}$

累次積分に直すと.

$$J = \int_0^1 \left(\int_0^{2-2x} xy\, dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 x \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{y=0}^{y=2-2x} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2} x (2-2x)^2\, dx$$

$$= \int_0^1 2(x^3 - 2x^2 + x)\, dx$$

$$= 2\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right]_{x=0}^{x=1}$$

$$= 2\left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \right) = 2 \times \frac{1}{12} = \underline{\frac{1}{6}}$$

問3、

(1) 極座標変換

$$\Phi : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(r,\theta) \longmapsto (x,y) = (r\cos\theta,\ r\sin\theta)$$

$I = \{(r,\theta) \mid 0 \leq r < +\infty,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ を考える.

ヤコビアンは $J(r,\theta) = r$.

変数変換公式により

$$J^2 = \iint_I e^{-r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}\, r\, dr d\theta$$
$$= \iint_I e^{-r^2} r\, dr d\theta$$

累次積分に直すと、変数分離して、

$$J^2 = \int_0^\infty r e^{-r^2} dr \times \int_0^{2\pi} 1\, d\theta$$
$$= \left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^\infty \times \left[\theta\right]_0^{2\pi}$$
$$= \frac{1}{2}\cdot 2\pi = \underline{\pi}.$$

(2) $e^{-x^2} > 0$ なので、

$J = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx > 0$ 、

(1) により $J^2 = \pi$ 、つまり $J = \pm\sqrt{\pi}$.

$J > 0$ であるから、 $\underline{J = \sqrt{\pi}}$

問4.(1)

$$J(r,\theta,\varphi)=\begin{vmatrix}\sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi\\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{3+1}\cos\theta\begin{vmatrix}r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi\\ r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi\end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{3+2}(-r\sin\theta)\begin{vmatrix}\sin\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi\end{vmatrix}$$

$$=\cos\theta\times r^2\sin\theta\cos\theta(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)$$

$$+r\sin\theta\times r\sin^2\theta(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)$$

$$=r^2\sin\theta(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=r^2\sin\theta$$

(2) 極座標変換を考える.

$$\Phi: \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & A\\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$}\\ (r,\theta,\varphi) & \longmapsto & (x,y,z)\end{array}$$

$$I=\{(r,\theta,\varphi)\mid 0\leq r\leq 1,\ 0\leq\theta\leq\tfrac{\pi}{2},\ 0\leq\varphi\leq\tfrac{\pi}{2}\}$$

ヤコビアンは $J(r,\theta,\varphi)=r^2\sin\theta$.

変数変換公式により,

$$K=\iiint_I (r\sin\theta\cos\varphi)^n\, r\sin\theta\sin\varphi\cdot r\cos\theta\cdot r^2\sin\theta\, dr\,d\theta\,d\varphi$$

$$=\iiint_I r^{n+4}\sin^{n+2}\theta\cdot\cos\theta\cdot\cos^n\varphi\cdot\sin\varphi\, dr\,d\theta\,d\varphi$$

累次積分に直すと変数分離して,

$$K=\int_0^1 r^{n+4}dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+2}\theta\cdot\cos\theta\, d\theta\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n\varphi\cdot\sin\varphi\, d\varphi$$

$$=\left[\frac{r^{n+5}}{n+5}\right]_0^1\cdot\left[\frac{1}{n+3}\sin^{n+3}\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\left[\frac{-1}{n+1}\cos^{n+1}\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\underline{\frac{1}{(n+5)(n+3)(n+1)}}.$$