

①

数学Ⅱ 2018 8回目スタート

問

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -5 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ -4 & -8 & 0 \end{pmatrix}$$

$$g_A(t) = |tE_3 - A|$$

$$= t(t-1)(t-\boxed{11})$$

固有値 0 に対する固有ベクトル P_1

$$P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ \boxed{2} \\ 3 \end{pmatrix}$$

固有値 1 に対する固有ベクトル P_2

$$P_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ \boxed{3} \\ 4 \end{pmatrix}$$

固有値 $\boxed{11}$ に対する固有ベクトル P_3

$$P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \boxed{14} \\ 2 \end{pmatrix}$$

$P = (P_1 P_2 P_3)$ とおくと,

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{11} \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{(1)} = 2$$

$$\boxed{(2)} = -1$$

$$\boxed{(3)} = -2$$

$$\boxed{(4)} = -1$$

$$g_A(t) = \left| \begin{pmatrix} t & & \\ & t & \\ & & t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -5 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ -4 & -8 & 0 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \begin{vmatrix} t+1 & & \\ -2 & & \\ 4 & & \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 5 & & \\ t-4 & & \\ 8 & & \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \\ t \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{1+3} 1 \times \begin{vmatrix} -2 & & \\ 4 & & \\ & & t-4 \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{3+3} t \times \begin{vmatrix} t+1 & & \\ -2 & & \\ & & t-4 \end{vmatrix}$$

$$= -16 - 4(t-4)$$

$$+ t((t+1)(t-4) + 10)$$

$$= -16 - 4t + 16$$

$$+ t \{ t^2 - 3t - 4 + 10 \}$$

$$= t^3 - 3t^2 + 6t - 4t$$

$$= t(t^2 - 3t + 2)$$

$$= t(t-1)(t-2).$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -5 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ -4 & -8 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解いて.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -5 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ -4 & -8 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

を解いて.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -5 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ -4 & -8 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

を解いて.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$$