数学Ⅱ 2018 レポート5回目

問1. $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 4 & 8 & 10\end{pmatrix}$

$\mathrm{Ker}A=\{x\in\mathbb{R}^3 \mid Ax=0\}$ をしらべる。

$$\mathrm{Ker}A=\left\{\begin{pmatrix}1\\ \boxed{(1)}\\ \boxed{(2)}\end{pmatrix}t \;\middle|\; t\in\mathbb{R}\right\}$$

問2. $B=\begin{pmatrix}1 & 4 & 5 & -2\\ -1 & -1 & -2 & -1\end{pmatrix}$

$$\dim \mathrm{Ker}B=\boxed{(3)}$$

問3. $a_1,a_2,a_3\in\mathbb{R}^3$ を $\mathbb{R}^3$ の基底とする。このとき、$a_1-a_2,\ a_2-a_3,\ a_3-a_1$ で生成される部分ベクトル空間を W とする。

$$\dim W=\boxed{(4)}$$

$\boxed{(1)} = -3$

$\boxed{(2)} = 2$

$\boxed{(3)} = 2$

$\boxed{(4)} = 2$

問1. 拡大係数行列.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 10 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[②-4\times①]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 6 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[②\times\frac{1}{2}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[①-\frac{1}{2}②]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ とする.

$x_3 = 2t$ とすると.

$$\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = -3t \\ x_3 = 2t \end{cases}$$

$$\mathrm{Ker}\, A = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\}$$

問2.

$$\mathrm{Ker}\,B = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

拡大係数行列.

$$\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 4 & 5 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[②+①]{} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 4 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[③\times\frac{1}{3}]{} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 4 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[①-4②]{} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$x_3 = s,\ x_4 = t$ とおくと.

$x_1 = -2t + s$
$x_2 = -s + t$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

よって

$\underline{\dim \mathrm{Ker}\,B = 2}$

問3.
$$\begin{cases} b_1 = a_1 - a_2 \\ b_2 = a_2 - a_3 \\ b_3 = a_3 - a_1 \end{cases}$$ とおく。

$$b_1 + b_2 + b_3 = a_1 - a_2 + a_2 - a_3 + a_3 - a_1 = 0$$

よって、b_1, b_2, b_3 は1次従属。

$c_1 b_1 + c_2 b_2 = 0$ ならば

$$c_1 b_1 + c_2 b_2 = c_1 a_1 + (-c_1 + c_2) a_2 - c_2 a_3 = 0$$

であるから、a_1, a_2, a_3 の1次独立性により、

$c_1 = 0$, $-c_1 + c_2 = 0$, $-c_2 = 0$

つまり $c_1 = c_2 = 0$

つまり b_1, b_2 は1次独立。

$b_3 = -b_1 - b_2$ より、

b_1, b_2, b_3 で生成される W は、

b_1, b_2 で生成され、b_1, b_2 は1次独立

なので、$\underline{\dim W = 2}$