数学II 2018 (レポート3回目)

問 次のベクトル空間の次元を求めなさい。

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{array} \right\}$$

$$\dim V_1 = \boxed{(1)}$$

$$V_2 = \left\{ c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3 \;\middle|\; c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

ただし、$a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.

$$V_3 = \left\{ c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3 + c_4 a_4 \;\middle|\; c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

ただし、$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$a_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$$\dim V_2 = \boxed{(2)}$$

$$\dim V_3 = \boxed{(3)}$$

$V_4 = \{ c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + c_3 f_3(x) \mid c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \}$

ただし,

$$\begin{cases} f_1(x) = 3 - 4x - x^2, \\ f_2(x) = -2 + 2x + x^2, \\ f_3(x) = -2 + 3x + x^2. \end{cases}$$

$\dim V_4 = \boxed{(4)}$

$\boxed{V_1 について}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[②+①]{}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[②\times\frac{1}{3}]{}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \end{array}\right) \xrightarrow[①-②]{}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$x_3 = s,\ x_4 = t$ とおく

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

つまり、

$$V_1 = \left\{ s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$s\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$\Longleftrightarrow$ $s=t=0$ なので、

$\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$ は1次独立で、V_1の基底である。

よって $\underline{\dim V_1 = 2}$

$\boxed{V_2 について}$

V_2 は a_1, a_2, a_3 で生成される。

$c_1a_1+c_2a_2+c_3a_3=0$

$\Longleftrightarrow$

$$\begin{pmatrix}0&2&1\\1&1&3\\-1&0&0\\1&1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}0&2&1&0\\1&1&3&0\\-1&0&0&0\\1&1&4&0\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{③+②\\④-②}]{}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{① - ④ \\ ② - 3 \times ④ \\ ③ - 3 \times ④}]{}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{① - 2 \times ③ \\ ② - ③}]{}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$\therefore c_1 = c_2 = c_3 = 0$

つまり, a_1, a_2, a_3 は1次独立.

つまり, a_1, a_2, a_3 は V_2 の基底

よって $\dim V_2 = 3$

V_3 について

V_3 は a_1, a_2, a_3, a_4 で生成される。

$a_3 = a_1 + a_2$
$a_4 = a_1 - a_2$

よって、V_3 は a_1, a_2 で生成される。

明らかに $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は

1次独立、よって a_1, a_2 は V_3 の基底。

よって $\underline{\dim V_3 = 2}$

V_4 について

$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + c_3 f_3(x) = 0$ ならば、

$c_1(3-4x-x^2) + c_2(-2+2x+x^2) + c_3(-2+3x+x^2) = 0$

$(3c_1 - 2c_2 - 2c_3) + (-4c_1 + 2c_2 + 3c_3)x$
$+ (-c_1 + c_2 + c_3)x^2 = 0$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -4 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & -2 & 0 \\ -4 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{②-4×③}]{①+3×③}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{③-①}]{②+①}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{①+②}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$\therefore\ c_1 = c_2 = c_3 = 0$

$\therefore$ f_1, f_2, f_3は一次独立.

V_4は f_1, f_2, f_3で生成される。

$\underline{\dim V_4 = 3}$