# 数学特論 レポート 2018 (2回目)

問2、 2次元Ising模型の転送行列 $V_1, V_2$ は互いに可換ではないことを示せ。

$$V_1 V_2 \neq V_2 V_1$$

問3、

$(\mathbb{C}^2)^{\otimes M}$ に作用する

$\left(x - \sum_{j=1}^{M} \sigma_j^x\right)$ の行列式は、

$$\left| x - \sum_{j=1}^{M} \sigma_j^x \right| = \prod_{j=0}^{M} (x - M + 2j)^{{}_M C_j}$$

であることを示せ。

問4.

$W=(\mathbb{C}^2)^{\otimes M}$ とする。

$W^{(\pm)}=\{w\in W \mid \sigma_1^x\sigma_2^x\cdots\sigma_M^x w=\pm w\}$

ただし、 $\sigma^x=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$.

$W=W^{(+)}\oplus W^{(-)}$ を示せ。

問5.

$W^{(\pm)}$ は問4で定めたものとする。

次を示せ。

$\sigma_m^x\ W^{(\pm)}\subset W^{(\pm)}$

$\sigma_m^y\ W^{(\pm)}\subset W^{(\mp)}$

$\sigma_m^z\ W^{(\pm)}\subset W^{(\mp)}$

問6、 $N=2,3,4,\cdots$.

$\zeta\ (\neq 1)$ は $1$ の $N$ 乗根とする。

$$\zeta^{N-1}+\zeta^{N-2}+\cdots+\zeta+1=0$$

を示せ。

問7、
$$e^{ad(Y)}(X)=e^{Y}Xe^{-Y}$$

を示せ。ただし、両辺とも収束するとする。

問8、 $K, K^{*}>0$ は、

$$\sinh(2K)\sinh(2K^{*})=1$$

をみたす。このとき、

$$\cosh(2K^{*})=\cosh(2K)\sinh(2K^{*})$$

$$\cosh(2K)=\cosh(2K^{*})\sinh(2K)$$

を示せ。

問9.

次の式を示せ.

$$x = \int_0^{2\pi} \log\{2(\cosh x - \cos\theta)\}\frac{d\theta}{2\pi}$$

$(x > 0)$.

(締切り)

2019. 1. 29.

問 2

$V_1 V_2 \neq V_2 V_1$ を示せ.

$$\begin{cases} V_1 = \exp\left(K_1 \sum_{j=1}^{M} \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z\right) \\ V_2 = \left(2\sinh(2K_2)\right)^{\frac{M}{2}} \exp\left(K_2^* \sum_{j=1}^{M} \sigma_j^x\right) \end{cases}$$

$$\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} H_1 = \sum_{j=1}^{M} \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z \\ H_2 = \sum_{j=1}^{M} \sigma_j^x \end{cases}$$ とおく.

$\sigma^x \sigma^z = -\sigma^z \sigma^x$ であるから、

$$H_2 \cdot H_1 = \sum_{j=1}^{M} \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z \left\{ \left(\sigma_j^x + \sigma_{j+1}^x\right) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j, j+1}}^{M} \sigma_k^x \right\}$$

$$= \sum_{j=1}^{M} \left\{ -\left(\sigma_j^x + \sigma_{j+1}^x\right) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j, j+1}}^{M} \sigma_k^x \right\} \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z$$

一方、

$$H_1 \cdot H_2 = \sum_{j=1}^{M} \sum_{k=1}^{M} \sigma_k^x \cdot \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z$$

$$= \sum_{j=1}^{M} \left\{ +\left(\sigma_j^x + \sigma_{j+1}^x\right) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j, j+1}}^{M} \sigma_k^x \right\} \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z$$

よって $H_1 H_2 \neq H_2 H_1$

さて、

$$V_1V_2 = (1 + K_1H_1 + O(K_1^2)) \times (1 + K_2^* H_2 + O(K_2^{*2}))$$
$$\times (2\sinh(2K_2))^{\frac{M}{2}}$$
$$= (2\sinh(2K_2))^{\frac{M}{2}} (1 + K_1H_1 + K_2^* H_2 + K_1K_2^* H_1H_2 + \cdots)$$

$$V_2V_1 = (2\sinh(2K_2))^{\frac{M}{2}} (1 + K_1H_1 + K_2^* H_2 + K_1K_2^* \cdot H_2H_1 + \cdots)$$

よって　$V_1V_2 \neq V_2V_1$.

問3. $$\det\left(x-\sum_{j=1}^{M}\sigma_j^x\right)=\prod_{j=0}^{M}(x-M+2j)^{{}_MC_j}$$ を示せ.

$$\sigma^x=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

$u_+=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $u_-=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ とおく.

$\sigma^x u_+=u_+$ , $\sigma^x u_-=-u_-$ である.
まとめて.
$\sigma^x u_\varepsilon=\varepsilon u_\varepsilon \quad (\varepsilon=\pm)$.

$(\mathbb{C}^2)^{\otimes M}$ の Basis として

$\{u_{\varepsilon_1}\otimes u_{\varepsilon_2}\otimes\cdots\otimes u_{\varepsilon_M} \quad (\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_M=\pm)\}$
がとれる.

$$\left(x-\sum_{j=1}^{M}\sigma_j^x\right)u_{\varepsilon_1}\otimes u_{\varepsilon_2}\otimes\cdots\otimes u_{\varepsilon_M}$$
$$=\left(x-\sum_{j=1}^{M}\varepsilon_j\right)u_{\varepsilon_1}\otimes u_{\varepsilon_2}\otimes\cdots\otimes u_{\varepsilon_M}.$$

よって,
$\{u_{\varepsilon_1}\otimes\cdots\otimes u_{\varepsilon_M} \ (\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_M=\pm)\}$ は
$\left(x-\sum_{j=1}^{M}\sigma_j^x\right)$ の固有ベクトルでもある。

よって

$$\det\left(x-\sum_{j=1}^{M}\sigma_j^x\right)=\prod_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_M=\pm}\left(x-\sum_{j=1}^{M}\varepsilon_j\right).$$

さて、$\sum_{i=1}^{M}\varepsilon_i$ の値は、$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_M$ のうち

$j$ $(0 \leq j \leq M)$ コが $\varepsilon_i = -$

$(M-j)$ コが $\varepsilon_i = +$ ならば、

$$\sum_{i=1}^{M}\varepsilon_i = -j + (M-j) = +M-2j.$$

このような えらび方は、

$${}_M C_j \text{ 通りある.}$$

よって

$$\det\left(x - \sum_{j=1}^{M}\sigma_j^x\right) = \prod_{j=0}^{M}(x - M + 2j)$$

//

問4.

$u_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_- = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とする。

$\sigma^x u_\varepsilon = \varepsilon u_\varepsilon \quad (\varepsilon = \pm)$ である。

$W = (\mathbb{C}^2)^{\otimes M}$ の基底として、

$\{ u_{\varepsilon_1} \otimes u_{\varepsilon_2} \otimes \cdots \otimes u_{\varepsilon_M} \quad (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_M = \pm) \}$

がとれる。

$\sigma_1^x \sigma_2^x \cdots \sigma_M^x u_{\varepsilon_1} \otimes \cdots \otimes u_{\varepsilon_M}$
$= \prod_{j=1}^{M} \varepsilon_j \cdot u_{\varepsilon_1} \otimes \cdots \otimes u_{\varepsilon_M}$ であるから、

$W^{(+)} = \langle u_{\varepsilon_1} \otimes \cdots \otimes u_{\varepsilon_M} \ (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_M = \pm, \prod_{j=1}^{M} \varepsilon_j = +1) \rangle_{\mathbb{C}}$

$W^{(-)} = \langle u_{\varepsilon_1} \otimes \cdots \otimes u_{\varepsilon_M} \ (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_M = \pm, \prod_{j=1}^{M} \varepsilon_j = -1) \rangle_{\mathbb{C}}$

$W^{(\pm)} \subset W$ で、

$W^{(+)}$ と $W^{(-)}$ はたがいに1次独立

$$W^{(+)} \oplus W^{(-)} \subset W$$

そして、$\dim W^{(+)} \oplus W^{(-)} = \dim W^{(+)} + \dim W^{(-)}$

$$= 2^{M-1} + 2^{M-1} = 2^M$$

$$\dim W = 2^M$$

よって $W^{(+)} \oplus W^{(-)} = W$.

問5.

$$\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ +i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \sigma^x u_\varepsilon = \varepsilon u_\varepsilon \\ \sigma^y u_\varepsilon = (-i)\varepsilon \cdot u_{-\varepsilon} \\ \sigma^z u_\varepsilon = u_{-\varepsilon} \end{cases} \qquad (\varepsilon = \pm)$$

よって

$$\begin{cases} \sigma_m^x u_{\varepsilon_1} \otimes \cdots \otimes u_{\varepsilon_M} = \varepsilon_m \cdot u_{\varepsilon_1} \otimes \cdots \otimes u_{\varepsilon_M} \\ \sigma_m^y u_{\varepsilon_1} \otimes \cdots \otimes u_{\varepsilon_M} = (-i\varepsilon_m) \cdot u_{\varepsilon_1} \otimes \cdots \otimes u_{\varepsilon_{m-1}} \\ \qquad \otimes u_{-\varepsilon_m} \otimes u_{\varepsilon_{m+1}} \cdots \otimes u_{\varepsilon_M} \\ \sigma_m^z u_{\varepsilon_1} \otimes \cdots \otimes u_{\varepsilon_M} = u_{\varepsilon_1} \otimes \cdots \otimes u_{\varepsilon_{m-1}} \otimes u_{-\varepsilon_m} \otimes u_{\varepsilon_{m+1}} \otimes \cdots \\ \qquad \cdots \otimes u_{\varepsilon_M} \end{cases}$$

$$W^{(\varepsilon)} = \left\langle u_{\varepsilon_1} \otimes \cdots \otimes u_{\varepsilon_M} \ \left(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_M = \pm, \ \prod_{j=1}^{M} \varepsilon_j = \varepsilon\right) \right\rangle$$

$(\varepsilon = \pm)$

であるから、

$$\sigma_m^x W^{(\varepsilon)} \subset W^{(\varepsilon)}$$

$$\sigma_m^y W^{(\varepsilon)} \subset W^{(-\varepsilon)}$$

$$\sigma_m^z W^{(\varepsilon)} \subset W^{(-\varepsilon)}$$

問6

$\xi^N = 1 \quad (\xi \neq 1) \quad (N = 2, 3, 4, \cdots)$ は

$$\xi^{N-1} + \xi^{N-2} + \cdots + \xi + 1 = 0$$

をみたすことを示せ.

$$\xi^N - 1 = (\xi - 1)(\xi^{N-1} + \xi^{N-2} + \cdots + \xi + 1) = 0.$$

$\xi \neq 1$ であるから,

$$\xi^{N-1} + \xi^{N-2} + \cdots + \xi + 1 = 0.$$

問7

$$e^{\mathrm{ad}(Y)}(X) = e^Y \cdot X e^{-Y}$$ を示せ.

ただし、両辺とも収束するとする.

まず、

$$\mathrm{ad}(Y)^n(X) = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k (-1)^{n-k} Y^k X Y^{n-k} \quad \text{---} (\star)$$

を示す. $n$ についての帰納法.

$n=1 \quad \mathrm{LHS} = \mathrm{ad}(Y)(X) = [Y, X]$

$\mathrm{RHS} = {}_1C_0 (-1) XY + {}_1C_1 (-1)^0 YX = [Y, X]$

となり一致.

あるnまで正しいならば、

$$\mathrm{ad}^{n+1}(Y)(X)$$

$$= \mathrm{ad}(Y)\ \mathrm{ad}^{n}(Y)(X)$$

$$= [Y, \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k (-1)^{n-k} Y^k X Y^{n-k}]$$

$$= \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k (-1)^{n-k} Y^{k+1} X Y^{n-k}$$

$$- \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k (-1)^{n-k} Y^{k} X Y^{n+1-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} {}_nC_{k-1} (-1)^{n+1-k} Y^{k} X Y^{n+1-k}$$

$$+ \sum_{k=0}^{n} {}_nC_{k} (-1)^{n+1-k} Y^{k} X Y^{n+1-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} {}_{n+1}C_{k} (-1)^{n+1-k} Y^{k} X Y^{n+1-k}$$

よって (☆) は $n+1$ でも成立.

ただし、

$${}_nC_0 = 1 = {}_{n+1}C_0$$

$${}_nC_n = 1 = {}_{n+1}C_{n+1}$$

$${}_nC_{k-1} + {}_nC_k = {}_{n+1}C_k \quad (k=1,2,3,\cdots,n)$$

を用いた.

(☆)を用いると、

$$e^{ad(Y)}(X)$$

$$= \sum_{=0}^{\infty} \frac{1}{n!} ad(Y)^n (X)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k (-1)^{n-k} Y^k X Y^{n-k}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!} Y^k \cdot X Y^{n-k}$$

2重和に関する式

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_{n-k}$$

に留意すれば

$$与式 = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} Y^m \cdot X \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} Y^n$$

$$= e^Y \cdot X \cdot e^{-Y}$$

//

問6

$K, K^* > 0$ は、

$\sinh(2K) \cdot \sinh(2K^*) = 1$ をみたす.

このとき、

$\cosh(2K^*) = \cosh(2K)\sinh(2K^*)$

$\cosh(2K) = \cosh(2K^*)\sinh(2K)$

を示せ.

$K, K^*$ は立場が対称なので、

$\cosh(2K) = \cosh(2K^*)\sinh(2K)$

のみ示せば十分.

$\sinh(2K) \cdot \sinh(2K^*) = 1$ を

$e^{2K^*} >$ について解く.

$$(e^{2K}-e^{-2K})(e^{2K^*})^2 - 4e^{2K^*} - (e^{2K}-e^{-2K}) = 0.$$

$$e^{2K^*} = \frac{2 \pm \sqrt{D}}{e^{2K}-e^{-2K}}, \quad D = (e^{2K}+e^{-2K})^2.$$

$e^{2K^*} >$ であるから

$$e^{2K^*} = \frac{2+\sqrt{D}}{e^{2K}-e^{-2K}} = \frac{(e^{K}+e^{-K})^2}{(e^{K}+e^{-K})(e^{K}-e^{-K})} = \frac{e^{K}+e^{-K}}{e^{K}-e^{-K}}$$

$$
\begin{aligned}
\cosh(2K^*) &= \frac{1}{2}\left(e^{2K^*}+e^{-2K^*}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{K}+e^{-K}}{e^{K}-e^{-K}}+\frac{e^{K}-e^{-K}}{e^{K}+e^{-K}}\right) \\
&= \frac{\cosh(2K)}{\sinh(2K)}
\end{aligned}
$$

問 7

次の式を示せ、

$$
x = \int_0^{2\pi} \log\left\{2\left(\cosh x - \cos\theta\right)\right\}\frac{d\theta}{2\pi}
$$

$$
(x > 0)
$$

Let us set

$$f(x) = \int_0^{2\pi} \log\{2(\cosh x - \cos\theta)\} \frac{d\theta}{2\pi} \qquad (x > 0).$$

We have

$$\frac{df}{dx}(x) = \int_0^{2\pi} \frac{d}{dx} \log\{2(\cosh x - \cos\theta)\} \frac{d\theta}{2\pi}$$

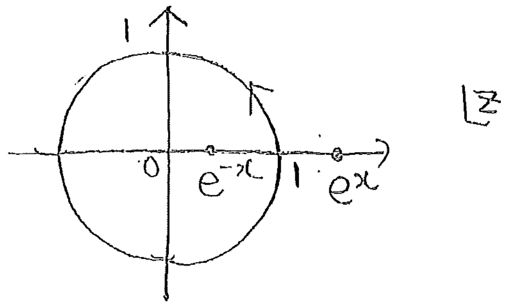
$$= \int_0^{2\pi} \frac{\sinh x}{\cosh x - \cos\theta} \frac{d\theta}{2\pi}$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{(e^{-x} - e^{x})}{(e^{i\theta} - e^{x})(e^{i\theta} - e^{-x})} \cdot \frac{e^{i\theta}}{2\pi} d\theta.$$

$$= (e^{-x} - e^{x}) \int_C \frac{1}{(z - e^{x})(z - e^{-x})} \frac{dz}{2\pi i}$$

where $z = e^{i\theta}$ and

the integration contour $C$ is given by




Because

$$\int_C \frac{dz}{(z - e^{x})(z - e^{-x})} = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z = e^{-x}} \frac{1}{(z - e^{x})(z - e^{-x})}$$

$$= 2\pi i / (e^{-x} - e^{x}),$$

We have

$$\frac{df}{dx}(x) = 1 .$$

Hence we have

$$f(x) = x + C .$$

Below we determine the constant $C$.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \left( \int_{\pi}^{2\pi} + \int_{0}^{\pi} \right) \frac{d\theta}{2\pi} \log \{ 2 ( \cosh x - \cos\theta ) \} \\
&= \int_{0}^{\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \log 2 ( \cosh x - \cos\theta ) \\
&\quad + \int_{0}^{\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \log 2 ( \cosh x + \cos\theta ) \\
&= \int_{0}^{\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \log 2^2 ( \cosh^2 x - \cos^2\theta ) \\
&= \int_{0}^{\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \log 2 ( \cosh 2x - \cos 2\theta ) \\
&= \frac{1}{2} \int_{0}^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \log 2 ( \cosh 2x - \cos\theta ) \\
&= \frac{1}{2} f(2x)
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad f(2x) = 2 f(x)$$

$$f(2x) = 2x + C$$
$$2 f(x) = 2x + 2C$$

$$\therefore \quad C = 0 \quad \therefore \quad \boxed{f(x) = x}$$