

数学Ⅲ 2018 (L#⁰-19回目)

問1. $f(z) = 1/z^3(z-2)^2$

$g(z) = \sin z / z^2$

 $z=2$ は $f(z)$ の $\boxed{(1)}$ 位の極. $z=0$ は $g(z)$ の $\boxed{(2)}$ 位の極.(ヒント. $\sin 0 = 0$)

問2. 留数の計算.

$$f(z) = \frac{1}{z^2(z-1)^3}$$

$$\operatorname{Res}[f(z); 0] = \boxed{(3)}$$

$$\operatorname{Res}[f(z); 1] = \boxed{(4)}$$

$$\boxed{(1)} = 2$$

$$\boxed{(2)} = 1$$

$$\boxed{(3)} = -3$$

$$\boxed{(4)} = 3$$

問1.
$$\bar{\sin} z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}$$

よって

$$g(z) = \frac{\bar{\sin} z}{z^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k-1}$$

$$= \frac{1}{z} + \frac{(-1)}{3!} + \frac{1}{5!} z + \dots$$

よって

$z=0$ は $g(z)$ の 1位の極.

問2.

$$\text{Res}[f(z); 0] = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{1!} \frac{d}{dz} \left[\frac{z^2}{z^2(z-1)^3} \right] = \underline{-3}$$

$$\text{Res}[f(z); 1] = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} \left[\frac{(z-1)^3}{z^2(z-1)^3} \right] = \underline{3}$$