数Ⅲ レポート 2018 （8回目）

問1、

$$f(z) = \frac{1}{z(z-2)^2}$$ を

領域 $(0 < |z| < 2)$ で

ローラン展開する。

$$f(z) = \frac{1}{az} + \frac{1}{b}\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)\left(\frac{z}{2}\right)^n$$

$a = \boxed{(1)}$

$b = \boxed{(2)}$

問2、 ① $g(z) = \frac{1}{z(z+1)}$ の

$z = -1$ は $\boxed{(3)}$ 位の極である。

② $h(z) = \frac{1}{z(z-2)^2}$ の $z = 2$ は、

$\boxed{(4)}$ 位の極である。

数III 2018（8回目）解答例．

問1．

幾何級数 $\dfrac{1}{1-z} = 1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots$

$= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad (|z|<1)$

を微分すると．

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n.$$

さて、

$$f(z) = \frac{1}{z(z-2)^2} = \frac{1}{4}\frac{1}{z}\frac{1}{\left(1-\frac{z}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{4}\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(\frac{z}{2}\right)^n$$

$$= \frac{1}{4z} + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\times 2\times\left(\frac{z}{2}\right)^{n-1}$$

$$= \frac{1}{4z} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)\left(\frac{z}{2}\right)^n$$

$\therefore \quad a = \boxed{(1)} = 4$

$b = \boxed{(2)} = 2$

問2．

$\boxed{(3)} = 1$

$\boxed{(4)} = 2$