数III レポート 2018（7回目）

問1、 Arctan z のテイラー展開

$$\mathrm{Arctan}\, z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\boxed{(1)}\, n + \boxed{(2)}} z^{2n+1}$$

$\boxed{(1)}$, $\boxed{(2)}$ = ?

問2、 次の関数を、原点を中心とする半径2の反時計回りの円C上積分しなさい。

$$f(z) = \frac{z}{z-1}$$

$$g(z) = \frac{e^z}{z^2}$$

$$\int_C f(z)\,dz = \boxed{(3)} \times \pi i$$

$$\int_C g(z)\,dz = \boxed{(4)} \times \pi i$$

2

$\boxed{(1)} = 2$

$\boxed{(2)} = 1$

$\boxed{(3)} = 2$

$\boxed{(4)} = 2$

解答例

問1. $(\mathrm{Arctan}\, z)' = 1/1+z^2$ であるから、

$$(\mathrm{Arctan}\, z)' = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}.$$

$\mathrm{Arctan}\, 0 = 0$ であるから、

$$\mathrm{Arctan}\, z = \int_0^z \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} dz$$

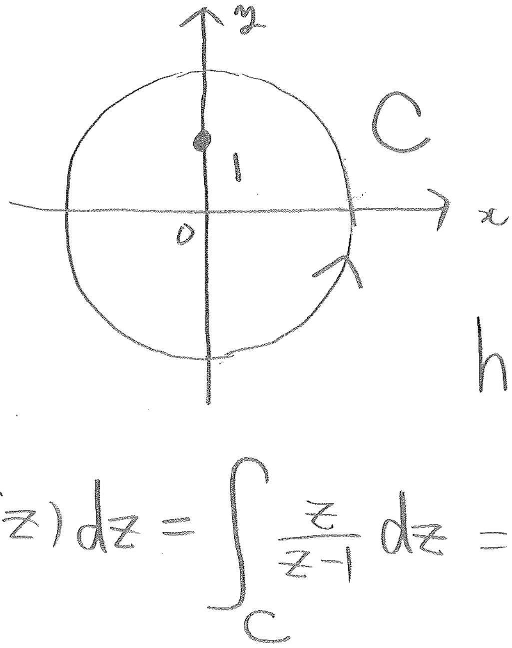
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} z^{2n+1}$$

よって $\boxed{(1)} = 2$

$\boxed{(2)} = 1.$

問2.

$f(z) = \dfrac{z}{z-1}$ の特異点と C の関係は.



Cauchyの積分表示.

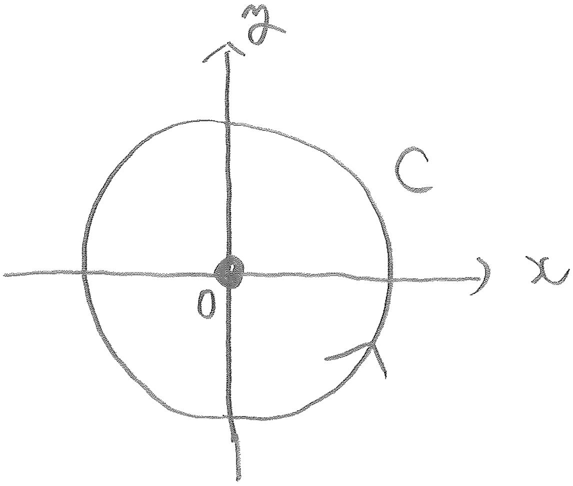
$h(z) = z$ とすると、

$$\int_C f(z) dz = \int_C \frac{z}{z-1} dz = \int_C \frac{h(z)}{z-1} dz = 2\pi i\, g(1)$$

$$= 2\pi i$$

よって $\boxed{(3)} = 2.$

$g(z) = \frac{e^z}{z^2}$ の特異点とCの関係は、



$f(z) = e^z$ として Cauchy の積分表示を用いると、

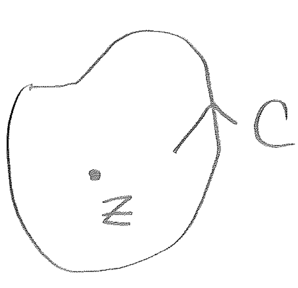
$$\int_C g(z)\,dz = \int_C \frac{e^z}{z^2}\,dz = \int_C \frac{f(z)}{z^2}\,dz = 2\pi i f'(0)$$

$$= 2\pi i$$

よって $\boxed{14} = 2$.

Cauchy の積分表示（とその微分）

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$$



$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,d\zeta$$