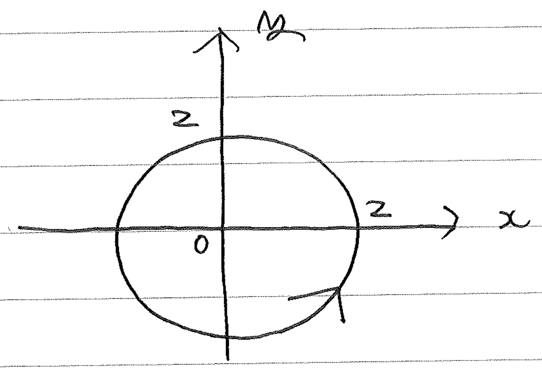
数III レポート 2018 (5回目)

問1. $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$

C : 原点を中心とする半径2の反時計回りの円



$\displaystyle\int_C f(z)\,dz$ を計算する。

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{i}{2}\left(\frac{1}{z+i} - \frac{1}{z-i}\right)$$

であるから、

$$\int_C f(z)\,dz = I_1 - I_2$$

ただし、

$$I_1 = \frac{i}{2}\int_C \frac{dz}{z+i},\quad I_2 = \frac{i}{2}\int_C \frac{dz}{z-i}$$

$I_1 = \boxed{(1)} \times \pi$

$I_2 = \boxed{(2)} \cdot \pi$

よって

$$\int_C f(z)\,dz = \boxed{(3)}$$

問2、

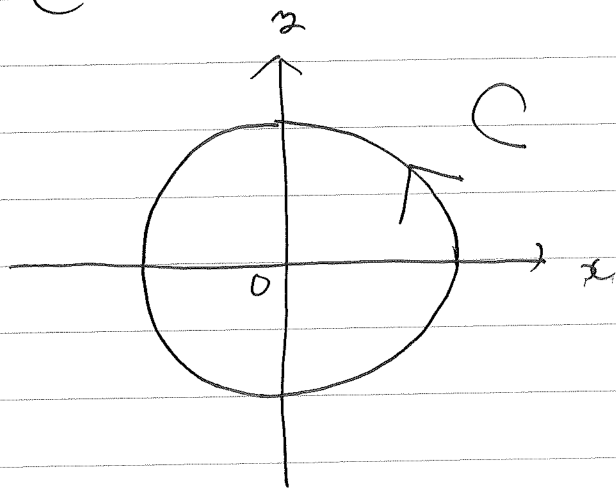
複素共役

正則ではない関数 $f(z) = \bar{z}$

を原点を中心とする反時計回りの

半径r （r>0）の$\underbrace{\text{円}}_{C}$上積分する。

$$\int_C f(z)\,dz = \boxed{(4)}\, i \times \pi r^2$$



$\boxed{(1)} = -1$

$\boxed{(2)} = -1$

$\boxed{(3)} = 0$

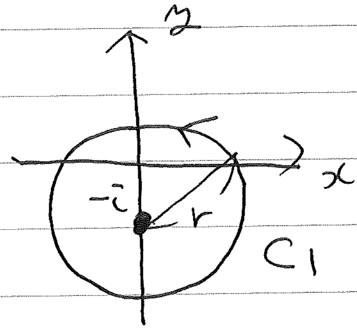
$\boxed{(4)} = 2$

C_1：$-i$を中心とする半径r $(r>0)$の
反時計回りの円

C_2：iを　〃

Cauchyの積分定理により、積分路を
連続変形する。

I_1の被積分関数の特異点は$z=-i$
であることに留意すれば、



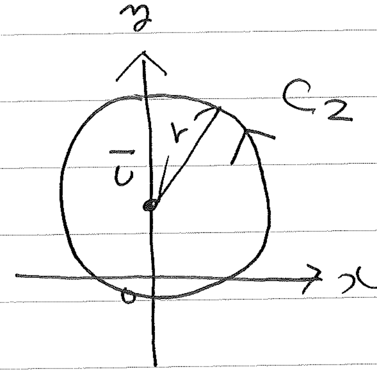
$$I_1 = \frac{i}{2}\int_{C_1}\frac{dz}{z+i}$$

C_1のパラメータ表示は、
$z_1(\theta) = -i + re^{i\theta}$
$(0 \leq \theta \leq 2\pi)$　であるから、

$$I_1 = \frac{i}{2}\int_0^{2\pi}\frac{(-i+re^{i\theta})'}{-i+re^{i\theta}+i}d\theta$$

$$= \frac{i}{2}\int_0^{2\pi}\frac{ire^{i\theta}}{re^{i\theta}}d\theta$$

$$= \frac{i}{2}\times i \cdot \int_0^{2\pi}d\theta = -\pi$$



同様にして、

$$I_2 = \frac{i}{2}\int_{C_2}\frac{dz}{z-i}$$

C_2 のパラメータ表示は、

$z_2(\theta) = i + re^{i\theta}$

$(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ であるから、

$$I_2 = \frac{i}{2}\int_0^{2\pi} \frac{(i+re^{i\theta})'}{i+re^{i\theta}-i}\, d\theta$$

$$= -\pi$$

問2. $C : z(\theta) = re^{i\theta} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$

$$\int_C f(z)\, dz$$

$$= \int_0^{2\pi} \overline{(re^{i\theta})}\,(re^{i\theta})'\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} re^{-i\theta}\, ire^{i\theta}\, d\theta$$

$$= ir^2 \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= ir^2 \left[\theta\right]_0^{2\pi} = 2\pi i r^2$$