数学III 2018 レポート10回目.

問1.

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+p\cos\theta} \qquad (0<p<1)$$

の値をもとめよう。

$z = e^{i\theta}$ で変数変換すると、

$$I = \int_C \frac{\boxed{(1)}\,dz}{ip(z^2+2z/p+1)}$$

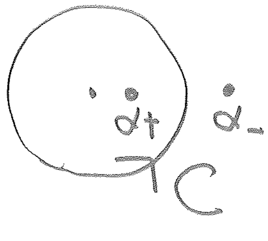
ただし C は、半径 $\boxed{(2)}$ の

反時計回りの円、

$z^2+2z/p+1=0$ の2根は、

$$z = \frac{-1\pm\sqrt{1-p^2}}{p} = \alpha_\pm$$ であり、

$$|\alpha_+| < 1 < |\alpha_-| .$$



$$\mathrm{Res}\left[\frac{1}{ip(z^2+2z/p+1)}, \alpha_+\right]$$

$$= \frac{\boxed{(3)}}{i\sqrt{1-p^2}}$$

留数定理により、

$$I = 2\pi i\,\mathrm{Res}\left[\frac{1}{ip(z^2+2z/p+1)}, \alpha_+\right] = \frac{\boxed{(4)}\,\pi}{\sqrt{1-p^2}}$$