数III 2018 レポート 1回目

問1、次の関数 $f(z)$ が $z=x+iy$ の正則関数になるように、定数 $a, b \in \mathbb{R}$ を定めよ.

$$f(z)=e^{ax}(\cos by + i\sin y).$$

$\boxed{(1)} = a$

$\boxed{(2)} = b$

問2、$f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$ $(z=x+iy)$ とする.

$u = ax^3+bxy^2$ $(a, b \in \mathbb{R})$

$f(z)$ が $z=x+iy$ の正則関数になるように、$v(x,y)$ を定めよ.

$$v(x,y) = \boxed{(3)} \times ax^2y - \boxed{(4)} \times ay^3 + c.$$

（解答）

問1．　$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$．

$$\begin{cases} u(x,y) = e^{ax}\cos by \\ v(x,y) = e^{ax}\sin by \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_x = a\,e^{ax}\cos by \\ u_y = -b\,e^{ax}\sin by \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x = a\,e^{ax}\sin\ \ y \\ v_y = \ \ e^{ax}\cos\ \ y \end{cases}$$

u_x, u_y, v_x, v_y は連続であり、

Cauchy－Riemann 方程式をみたす
必要十分条件は．

$u_x = v_y \Longleftrightarrow a = 1$

$u_y = -v_x \Longleftrightarrow a = b$

よって　$a = b = 1$

$$\boxed{(1)} = \boxed{(2)} = 1$$

問2.

$$u_x = 3ax^2 + by^2$$
$$u_y = 2bxy$$

Cauchy-Riemann 方程式をみたすように $v(x,y)$ を求める.

$$\begin{cases} v_x = -u_y = -2bxy & \text{---- ①} \\ v_y = u_x = 3ax^2+by^2 & \text{---- ②} \end{cases}$$

② より,
$$v = 3ax^2y + \frac{1}{3}by^3 + c$$
① より,
$$v_x = 6axy = -2bxy$$

$b = -3a$ が必要.

$$\underline{v = 3ax^2y - ay^3 + C} \quad (a, C \text{は定数})$$

実際、こうすれば Cauchy-Riemann 方程式を満たし、u_x, u_y, v_x, v_y は連続. よって、

$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ は正則になる.

$\boxed{(3)} = 3$

$\boxed{(4)} = 1$