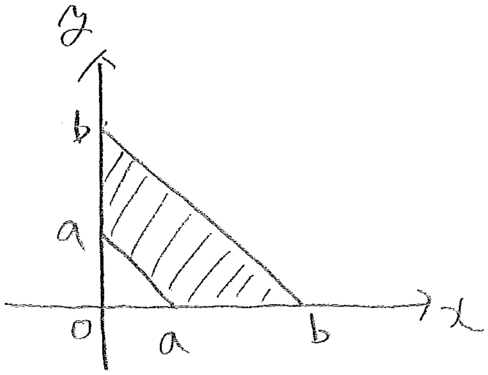
数I 2018 レポート (8回目)

問1.

$$I = \iint_E \exp\left(\frac{x-y}{x+y}\right) dxdy$$

$$E = \{(x,y) \mid a \le x+y \le b,\ x,y \ge 0\}$$

$(0 < a \le b)$



を変数変換 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u+uv \\ u-uv \end{pmatrix}$ を行うことで

もとめよ.

ヤコビアン $J(u,v) = \boxed{(1)} \times u$

$$I = (e-e^{-1})(b^2-a^2)\frac{1}{\boxed{(2)}}$$

問2.

次の変数変換のヤコビアンをもとめなさい.

ただし、ヤコビアンは、

$$J(r,\theta,\varphi)=\begin{vmatrix} x_r & x_\theta & x_\varphi \\ y_r & y_\theta & y_\varphi \\ z_r & z_\theta & z_\varphi \end{vmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$J(r,\theta,\varphi)=r^{a}\sin^{b}\theta$$

$a=\boxed{(3)}$

$b=\boxed{(4)}$

3

$\boxed{(1)} = -2$

$\boxed{(2)} = 4$

$\boxed{(3)} = 2$

$\boxed{(4)} = 1$

問1、

変換 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(1+v) \\ u(1-v) \end{pmatrix}$ により、

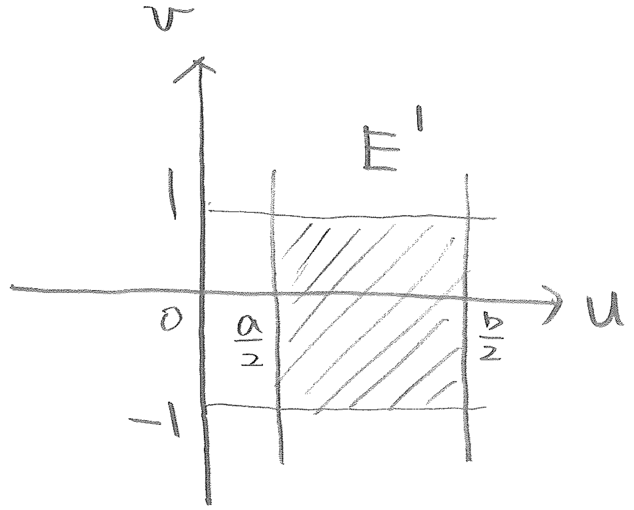
$E = \{ (x,y) \mid a \leq x+y \leq b,\ x,y \geq 0 \}$ は、
$(0 < a \leq b)$

$E' = \{ (u,v) \mid a \leq 2u \leq b,\ u(1+v) \geq 0,\ u(1-v) \geq 0 \}$

に写る。

$0 < \frac{a}{2} \leq u$ であるから、$\begin{matrix} 1+v \geq 0 \\ 1-v \geq 0 \end{matrix}$. よって

$E' = \{ (u,v) \mid \frac{a}{2} \leq u \leq \frac{b}{2},\ -1 \leq v \leq 1 \}$



ヤコビアンは、

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} 1+v & u \\ 1-v & -u \end{vmatrix} = -2u$$

よって変数変換公式により、

$$I = \iint_{E'} \exp\left(\frac{u+uv-u+uv}{u+uv+u-uv} \right) |-2u|\, du\, dv$$

$$= \iint_{E'} e^{v} \times 2u \, du\, dv$$

$$= \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{b}{2}} 2u \, du \times \int_{-1}^{1} e^{v} \, dv$$

$$= \left[u^2 \right]_{u=\frac{a}{2}}^{u=\frac{b}{2}} \left[e^{v} \right]_{v=-1}^{v=1}$$

$$= \frac{1}{4}(b^2 - a^2)\left(e - \frac{1}{e}\right)$$

問2.

$$J(r,\theta,\varphi)=\begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{3+1}\cos\theta\begin{vmatrix} r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{3+2}(-r\sin\theta)\begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \end{vmatrix}$$

$$= r^2\cos^2\theta\sin\theta(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)$$

$$+ r^2\sin^3\theta(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)$$

$$= r^2\sin\theta(\cos^2\theta+\sin^2\theta)$$

$$= \underline{r^2\sin\theta}$$