数学Iレポート（7回目）

問1　次の積分を誘導に従いもとめなさい。

$$I = \iiint_A xy \; dx\,dy\,dz$$

ただし、

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x,y,z \geq 0,\; x+y+z \leq 1\}.$$

$0 \leq x \leq 1$ に対し、

$$A_x = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 \mid y,z \geq 0,\; y+z \leq 1-x\}$$

$$\iint_{A_x} y \; dy\,dz = \frac{1}{\boxed{(1)}}(1-x)^{\boxed{(2)}}.$$

よって、

$$I = \int_0^1 \left(\iint_{A_x} y \; dy\,dz \right) x \, dx$$

$$= \frac{1}{\boxed{(3)}}$$

問2.

$$\iint_B \sin x \; dx\,dy = \boxed{(4)}$$

ただし

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq \tfrac{\pi}{2},\; 0 \leq y \leq 2x\}$$

2

$\boxed{(1)} = 6$

$\boxed{(2)} = 3$

$\boxed{(3)} = 120$

$\boxed{(4)} = 2$

問1

$$A_x = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq z \leq 1-x,\ 0 \leq y \leq 1-x-z\}$$

であるから、

$$\iint_{A_x} y \, dy dz = \int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-x-z} y \, dy \right) dz$$

$$= \int_0^{1-x} \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_0^{1-x-z} dz$$

$$= \int_0^{1-x} \frac{1}{2} (1-x-z)^2 dz$$

$$= \left[\frac{(-1)}{6} (1-x-z)^3 \right]_{z=0}^{z=1-x}$$

$$= -\frac{1}{6} \{ 0^3 - (1-x)^3 \}$$

$$= \frac{1}{6} (1-x)^3$$

$$\iiint_A xy \, dx dy dz$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{6} (1-x)^3 \cdot x \, dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{6} \{ -(1-x)^4 + (1-x)^3 \} dx$$

$$= \frac{1}{6} \left[\frac{1}{5} (1-x)^5 - \frac{1}{4} (1-x)^4 \right]_{x=0}^{x=1}$$

$$= \frac{1}{6} \left(-\frac{1}{5} + \frac{1}{4} \right)$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{-4+5}{20} = \frac{1}{120}$$

問2.

$$\iint_B \sin x \, dxdy$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2x} \sin x \, dy \right) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\sin x \cdot y \right]_{y=0}^{y=2x} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x \cdot \sin x \, dx$$

$u = x$, $u' = 1$

$v' = \sin x$, $v = -\cos x$

$$= 2 \left\{ \left[-x \cos x \right]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx \right\}$$

$$= 2 \left[-\sin x \right]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} = \underline{2}$$