確率統計学２０１７・レポート１回目

問１　（ベイズの定理） 王は戦勝を祝い死刑囚の恩赦を決定し、４人の死刑囚（a,b,c,d）のうち１人が恩赦される。ただし、死刑囚たちには誰が恩赦されるかは伝えられていない。死刑囚 a は「自分以外の b,c,d のうち少なくとも１名は処刑される。b,c,d から処刑される囚人の名を一人教えてくれと」看守にたのんだ。看守は d が処刑されると a に教えた。看守が d が処刑されると a に教える事象を X とおく。また a が恩赦される事象を A とする。事象 X のもと a が助かる確率 $P(A|X) = \frac{1}{\boxed{(1)}}$ を求めなさい。なお死刑囚 a は、a,b,c のうち１人が助かるので、自分が助かる確率は $\frac{1}{3}$ と考えている。

問２（ベイズの定理）　王は戦勝を祝い死刑囚の恩赦を決定し、n 人 $(n = 3, 4, 5, \cdots)$ の死刑囚 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ のうち１人が恩赦される。ただし、死刑囚たちには誰が恩赦されるかは伝えられていない。死刑囚 a_1 は「自分以外の $(n-1)$ 人のうち少なくとも１名は処刑される。$a_2, a_3, \cdots, a_n$ から処刑される囚人の名を一人教えてくれと」看守にたのんだ。看守は a_n が処刑されると a_1 に教えた。看守が a_n が処刑されると a_1 に教える事象を X とおく。また a_j $(j = 1, 2, \cdots, n)$ が恩赦される事象を A_j とする。$P(X|A_1) = \frac{1}{n - \boxed{(2)}}$, $P(X|A_j) = \frac{1}{n - \boxed{(3)}}$ $(2 \le j \le n-1)$, $P(X|A_n) = 0$, および $P(A_1|X) = \frac{\boxed{(4)}}{n}$ になる。

問1. b が恩赦される事象 B
　　 c 〃 C
　　 d 〃 D とする。

$$P(A)=P(B)=P(C)=P(D)=\frac{1}{4}$$

$$P(X|A)=\frac{1}{3}$$

$$P(X|B)=P(X|C)=\frac{1}{2}$$

$$P(X|D)=0$$

ベイズの定理により、

$$P(A|X)=\frac{P(X|A)P(A)}{P(X)}=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}}=\frac{1}{4}$$

$$P(X)=P(X|A)P(A)+P(X|B)P(B)+P(X|C)P(C)+P(X|D)P(D)$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+0$$

$$=\frac{1}{3}$$

$$\boxed{(1)}=4$$

問2. $P(A_j)=\frac{1}{n}$ $(1\leq j\leq n)$.

$P(X|A_1)$ = $a_2, a_3, \cdots, a_n$ の $(n-1)$ 人から a_n をえらぶ確率は、

$$P(X|A_1)=\frac{1}{n-1}$$

$P(X|A_j)$ $(2\leq j\leq n-1)$: $a_2, \cdots, a_{j-1}, a_{j+1}, \cdots, a_n$ の $(n-2)$ 人から a_n をえらぶ.

$$P(X|A_j)=\frac{1}{n-2} \quad (2\leq j\leq n-1)$$

$P(X|A_n)$

ベイズの定理から、

$$P(A_1|X)=\frac{P(X|A_1)P(A_1)}{P(X)}=\frac{\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{n}}{\frac{1}{n-1}}=\frac{1}{n}$$

$$P(X)=\sum_{j=1}^{n}P(X|A_j)P(A_j)$$

$$=\left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n-2}\times(n-2)+0\right)\frac{1}{n}=\frac{1}{n-1}$$

$\boxed{(2)}=1$, $\boxed{3}=2$, $\boxed{(4)}=1$