数学特論2017　2回目レポート

問1. 転送行列 V_2 を次で定める。

$$(V_2)_{s^{(1)},s^{(2)}} = \exp\left(K_2 \sum_{i=1}^{M} s_i^{(1)} s_i^{(2)}\right).$$

$$V_2 = (2\sinh(2K_2))^{\frac{M}{2}} \exp\left(K_2^* \sum_{i=1}^{M} \sigma_i^x\right)$$

を示せ．ただし、 $\sinh(2K_2)\sinh(2K_2^*) = 1$ ($K_2, K_2^* > 0$) をみたす．1次元Isingについての結果を用いてよいとする．

問2. 転送行列 V_1, V_2 は可換でないことを示せ．

$$V_1 V_2 \neq V_2 V_1$$

問3、次の式を示せ．

$$\det\left(x - \sum_{j=1}^{M} \sigma_j^x\right) = \prod_{j=0}^{M} (x - M + 2j)^{{}_M C_j}$$

(続く)

問4. $N=2,3,4,\cdots$ とする。

$\xi^N=1\ (\xi\neq 1)$ は、

$\xi^{N-1}+\xi^{N-2}+\cdots+\xi+1=0$ をみたす.

問5、

$$e^{\mathrm{ad}(Y)}(X)=e^{Y}\cdot Xe^{-Y}$$ を示せ.

左辺は、

$$e^{\mathrm{ad}(Y)}(X)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\mathrm{ad}(Y)^n(X)$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}[Y,[Y,\cdots[Y,X]\cdots]]$$

を表す.

問6 $K,K^*>0$ は、

$\sinh(2K)\cdot\sinh(2K^*)=1$ をみたす.

このとき、

$$\cosh(2K^*)=\cosh(2K)\sinh(2K^*)$$
$$\cosh(2K)=\cosh(2K^*)\sinh(2K)$$

を示せ.

問7 次の式を示せ.

$$x=\int_0^{2\pi}\log\{2(\cosh x-\cos\theta)\}\frac{d\theta}{2\pi}\quad(x>0).$$

解答例

問1.

$$V_2 = (2\sinh(2K_2))^{\frac{M}{2}} \exp\left(K_2^* \sum_{i=1}^{M} \sigma_i^x\right)$$

を示せ.

$$(V_2)_{s^{(1)}, s^{(2)}} = \exp\left(K_2 \sum_{i=1}^{M} s_i^{(1)} s_i^{(2)}\right)$$ を示す。

さて,

$$V_2 = \left[(2\sinh(2K_2))^{\frac{M}{2}} \prod_{i=1}^{M} \exp\left(K_2^* \sigma_i^x\right)\right]_{s^{(1)}, s^{(2)}}$$

$$= (2\sinh(2K_2))^{\frac{M}{2}} \prod_{i=1}^{M} \exp\left(K_2^* \sigma_i^x\right)_{s_i^{(1)}, s_i^{(2)}}$$

1次元 Ising 模型の結果として,

$$(2\sinh(2K_2))^{\frac{1}{2}} \exp\left(K_2^* \sigma_i^x\right)_{s_i, t_i}$$

$$= \exp\left(K_2 s_i t_i\right)$$ が知られている. (既出).

これを用いれば,

$$(V_2)_{s^{(1)}, s^{(2)}} = \prod_{i=1}^{M} \exp\left(K_2 s_i^{(1)} s_i^{(2)}\right)$$

$$= \exp\left(K_2 \sum_{i=1}^{M} s_i^{(1)} s_i^{(2)}\right)$$

//

問 2

$V_1 V_2 \neq V_2 V_1$ を示せ.

$$\begin{cases} V_1 = \exp\left(K_1 \sum_{j=1}^{M} \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z\right) \\ V_2 = (2\sinh(2K_2))^{\frac{M}{2}} \exp\left(K_2^* \sum_{j=1}^{M} \sigma_j^x\right) \end{cases}$$

$$\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} H_1 = \sum_{j=1}^{M} \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z \\ H_2 = \sum_{j=1}^{M} \sigma_j^x \end{cases}$$ とおく.

$\sigma^x \sigma^z = -\sigma^z \sigma^x$ であるから、

$$H_2 \cdot H_1 = \sum_{j=1}^{M} \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z \left\{ (\sigma_j^x + \sigma_{j+1}^x) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j, j+1}}^{M} \sigma_k^x \right\}$$

$$= \sum_{j=1}^{M} \left\{ -(\sigma_j^x + \sigma_{j+1}^x) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j, j+1}}^{M} \sigma_k^x \right\} \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z$$

一方、

$$H_1 \cdot H_2 = \sum_{j=1}^{M} \sum_{k=1}^{M} \sigma_k^x \cdot \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z$$

$$= \sum_{j=1}^{M} \left\{ +(\sigma_j^x + \sigma_{j+1}^x) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j, j+1}}^{M} \sigma_k^x \right\} \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z$$

よって　$H_1 H_2 \neq H_2 H_1$

さて、

$$V_1V_2 = (1 + K_1H_1 + O(K_1^2)) \times (1 + K_2^* H_2 + O(K_2^{*2}))$$
$$\times \left(2\sinh(2K_2)\right)^{\frac{M}{2}}$$
$$= \left(2\sinh(2K_2)\right)^{\frac{M}{2}} (1 + K_1H_1 + K_2^*H_2 + K_1K_2^* H_1H_2 + \cdots)$$

$$V_2V_1 = \left(2\sinh(2K_2)\right)^{\frac{M}{2}} (1 + K_1H_1 + K_2^*H_2 + K_1K_2^* \cdot H_2H_1 + \cdots)$$

よって　$V_1V_2 \neq V_2V_1$.

問3. $\boxed{\det\left(x-\sum_{j=1}^{M}\sigma_j^x\right)=\prod_{j=0}^{M}(x-M+2j)^{{}_M C_j}}$ を示せ.

$\sigma^x=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$

$u_+=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $u_-=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ とおく.

$\sigma^x u_+=u_+$, $\sigma^x u_-=-u_-$ である.

まとめて.

$\sigma^x u_\varepsilon=\varepsilon u_\varepsilon \quad (\varepsilon=\pm)$.

$(\mathbb{C}^2)^{\otimes M}$ の Basis として

$\{u_{\varepsilon_1}\otimes u_{\varepsilon_2}\otimes\cdots\otimes u_{\varepsilon_M}\ (\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_M=\pm)\}$

がとれる.

$$\left(x-\sum_{j=1}^{M}\sigma_j^x\right)u_{\varepsilon_1}\otimes u_{\varepsilon_2}\otimes\cdots\otimes u_{\varepsilon_M}$$
$$=\left(x-\sum_{j=1}^{M}\varepsilon_j\right)u_{\varepsilon_1}\otimes u_{\varepsilon_2}\otimes\cdots\otimes u_{\varepsilon_M}.$$

よって,

$\{u_{\varepsilon_1}\otimes\cdots\otimes u_{\varepsilon_M}\ (\varepsilon_1,\varepsilon_2\cdots,\varepsilon_M=\pm)\}$ は

$\left(x-\sum_{j=1}^{M}\sigma_j^x\right)$ の固有ベクトルでもある。

よって

$$\det\left(x-\sum_{j=1}^{M}\sigma_j^x\right)=\prod_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_M=\pm}\left(x-\sum_{j=1}^{M}\varepsilon_j\right).$$

さて、 $\sum_{i=1}^{M} \varepsilon_i$ の値は、 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_M$ のうち

j $(0 \leq j \leq M)$ コが $\varepsilon_i = -$

$(M-j)$ コが $\varepsilon_i = +$ ならば、

$$\sum_{i=1}^{M} \varepsilon_i = -j + (M-j) = +M-2j.$$

このようなえらび方は、

$${}_M C_j \text{ 通りある.}$$

よって

$$\det\left(x - \sum_{j=1}^{M} \sigma_j^x\right) = \prod_{j=0}^{M} (x - M + 2j) \quad //$$

問4

$\xi^N = 1 \quad (\xi \neq 1) \quad (N=2,3,4,\cdots)$ は

$\xi^{N-1}+\xi^{N-2}+\cdots+\xi+1=0$

をみたすことを示せ.

$$\xi^N-1=(\xi-1)(\xi^{N-1}+\xi^{N-2}+\cdots+\xi+1)=0.$$

$\xi \neq 1$ であるから,

$$\xi^{N-1}+\xi^{N-2}+\cdots+\xi+1=0.$$

問5 $e^{\mathrm{ad}(Y)}(X) = e^{Y}\cdot X e^{-Y}$ を示せ.

ただし、両辺とも収束するとする.

まず、

$$\mathrm{ad}(Y)^n(X) = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k (-1)^{n-k} Y^k X Y^{n-k} \quad \text{——(☆)}$$

を示す. nについての帰納法.

$n=1$ LHS $= \mathrm{ad}(Y)(X) = [Y, X]$

RHS $= {}_1C_0(-1)XY + {}_1C_1(-1)^0 YX = [Y, X]$

となり一致.

あるnまで正しいならば、

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{ad}^{n+1}(Y)(X)\\
&= \mathrm{ad}(Y)\ \mathrm{ad}^{n}(Y)(X)\\
&= \left[Y, \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k (-1)^{n-k} Y^k X Y^{n-k}\right]\\
&= \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k (-1)^{n-k} Y^{k+1} X Y^{n-k}\\
&\qquad - \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k (-1)^{n-k} Y^{k} X Y^{n+1-k}\\
&= \sum_{k=1}^{n+1} {}_nC_{k-1} (-1)^{n+1-k} Y^{k} X Y^{n+1-k}\\
&\quad + \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k (-1)^{n+1-k} Y^{k} X Y^{n+1-k}\\
&= \sum_{k=0}^{n+1} {}_{n+1}C_k (-1)^{n+1-k} Y^{k} X Y^{n+1-k}
\end{aligned}
$$

よって (☆) は $n+1$ でも成立.

ただし、

$$ {}_nC_0 = 1 = {}_{n+1}C_0 $$

$$ {}_nC_n = 1 = {}_{n+1}C_{n+1} $$

$$ {}_nC_{k-1} + {}_nC_k = {}_{n+1}C_k \quad (k=1,2,3,\cdots,n) $$

を用いた.

(★)を用いると、

$$e^{\mathrm{ad}(Y)}(X)$$

$$= \sum_{=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathrm{ad}(Y)^n (X)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k (-1)^{n-k} Y^k X Y^{n-k}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{k!\,(n-k)!} Y^k \cdot X Y^{n-k}$$

2重和に関する式

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

に留意すれば

$$与式 = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} Y^m \cdot X \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} Y^n$$

$$= e^Y \cdot X \cdot e^{-Y}$$

//

問 6 $K, K^* > 0$ は、

$\sinh(2K)\cdot\sinh(2K^*) = 1$ をみたす。

このとき、

$\cosh(2K^*) = \cosh(2K)\sinh(2K^*)$

$\cosh(2K) = \cosh(2K^*)\sinh(2K)$

を示せ。

K, K^* は立場が対称なので、

$\cosh(2K) = \cosh(2K^*)\sinh(2K)$

のみ示せば十分。

$\sinh(2K)\cdot\sinh(2K^*) = 1$ を

$e^{2K^*} >$ について解く。

$$(e^{2K}-e^{-2K})(e^{2K^*})^2 - 4e^{2K^*} - (e^{2K}-e^{-2K}) = 0.$$

$$e^{2K^*} = \frac{2 \pm \sqrt{D}}{e^{2K}-e^{-2K}}, \quad D = (e^{2K}+e^{-2K})^2.$$

$e^{2K^*} >$ であるから

$$e^{2K^*} = \frac{2+\sqrt{D}}{e^{2K}-e^{-2K}} = \frac{(e^{K}+e^{-K})^2}{(e^{K}+e^{-K})(e^{K}-e^{-K})} = \frac{e^{K}+e^{-K}}{e^{K}-e^{-K}}$$

$$\cosh(2K^*) = \frac{1}{2}\left(e^{2K^*} + e^{-2K^*}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{K}+e^{-K}}{e^{K}-e^{-K}} + \frac{e^{K}-e^{-K}}{e^{K}+e^{-K}}\right)$$

$$= \frac{\cosh(2K)}{\sinh(2K)}$$

//

問 7

次の式を示せ.

$$x = \int_0^{2\pi} \log\left\{2(\cosh x - \cos\theta)\right\}\frac{d\theta}{2\pi}$$

$$(x > 0)$$

Let us set

$$f(x) = \int_0^{2\pi} \log\{2(\cosh x - \cos\theta)\} \frac{d\theta}{2\pi} \qquad (x > 0).$$

We have

$$\frac{df}{dx}(x) = \int_0^{2\pi} \frac{d}{dx} \log\{2(\cosh x - \cos\theta)\} \frac{d\theta}{2\pi}$$

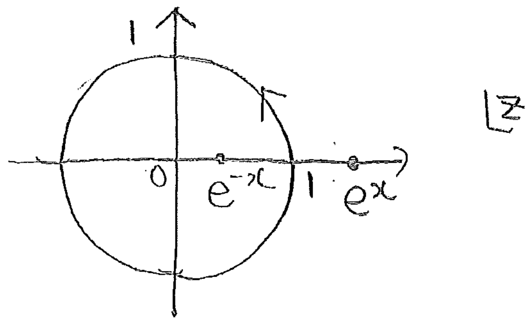
$$= \int_0^{2\pi} \frac{\sinh x}{\cosh x - \cos\theta} \frac{d\theta}{2\pi}$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{(e^{-x} - e^{x})}{(e^{i\theta} - e^{x})(e^{i\theta} - e^{-x})} \cdot \frac{e^{i\theta}}{2\pi} d\theta.$$

$$= (e^{-x} - e^{x}) \int_C \frac{1}{(z - e^{x})(z - e^{-x})} \frac{dz}{2\pi i}$$

where $z = e^{i\theta}$ and

the integration contour C is given by



Because

$$\int_C \frac{dz}{(z - e^{x})(z - e^{-x})} = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z = e^{-x}} \frac{1}{(z - e^{x})(z - e^{-x})}$$

$$= 2\pi i / (e^{-x} - e^{x}),$$

We have

$$\frac{df}{dx}(x) = 1 .$$

Hence we have

$$f(x) = x + C .$$

Below we determine the constant C.

$$f(x) = \left(\int_{\pi}^{2\pi} + \int_0^{\pi} \right) \frac{d\theta}{2\pi} \log\{2(\cosh x - \cos\theta)\}$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \log 2(\cosh x - \cos\theta)$$

$$+ \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \log 2(\cosh x + \cos\theta)$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \log 2^2(\cosh^2 x - \cos^2\theta)$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \log 2(\cosh 2x - \cos 2\theta)$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \log 2(\cosh 2x - \cos\theta)$$

$$= \frac{1}{2} f(2x)$$

$$\therefore \quad f(2x) = 2f(x)$$

$$f(2x) = 2x + C$$

$$2f(x) = 2x + 2C$$

$$\therefore \quad C = 0 \qquad \therefore \quad \boxed{f(x) = x}$$