微積分解法 2017 レポート (6回目)

問　次の関数のマクローリン展開を求めよ。

$$f(x) = \sin^2 x$$

$$g(x) = 1/\sqrt{1-x}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a^{2n+1}}{(an+a)!} x^{2n+2}$$

$$\boxed{(1)} = a$$

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(bn-1)!!}{(bn)!!} x^n$$

$$\boxed{(2)} = b$$

$\boxed{(1)} = 2$

$\boxed{(2)} = 2$

・ $f(x) = \sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$

$\cos y = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} y^{2n}$ であるから、

$$= -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (2x)^{2n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n+1}}{(2n+2)!} x^{2n+2}$$

・ $g(x) = 1/\sqrt{1-x}$

$$\begin{cases} g'(x) = -\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{3}{2}} \times (-1) \\ g^{(2)}(x) = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)(1+x)^{-\frac{5}{2}} \times (-1)^2 \\ \quad \vdots \\ g^{(n)}(x) = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right) \cdots \left(-\frac{1}{2}-n+1\right)(1+x)^{-\frac{1}{2}-n}(-1)^n \end{cases}$$

$$g^{(n)}(0) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}$$

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{2^n} \cdot (2n-1)!!\, x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n$$

(別解)

$$f(x) = \sin^2 x$$

$$f'(x) = 2\sin x \cos x = \sin(2x)$$

$\sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} n\right)$ であるから、

$n = 1, 2, 3, \cdots$ のとき、

$$f^{(n)}(x) = 2^{n-1} \sin\left(x + \frac{\pi}{2}(n-1)\right)$$

$$f^{(n)}(0) = 2^{n-1} \sin \frac{\pi}{2}(n-1)$$

$$f^{(n)}(0) = 2^{n-1} \times \begin{cases} \sin 2\pi k = 0 & (n = 4k+1) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) = 1 & (n = 4k+2) \\ \sin(\pi + 2\pi k) = 0 & (n = 4k+3) \\ \sin\left(\frac{3}{2}\pi + 2\pi k\right) = -1 & (n = 4k+4) \end{cases}$$

$(k = 0, 1, 2, \cdots)$

さらに、

$$f^{(0)}(0) = f(0) = \sin^2 0 = 0.$$

よって、

$$f(x) = \sin^2 x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{4k+1}}{(4k+2)!} x^{4k+2}$$

$$- \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{4k+3}}{(4k+4)!} x^{4k+4}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m 2^{2m+1}}{(2m+2)!} x^{2m+2}$$