

## 確率統計学2016・レポート1回目

問1 (ベイズの定理) 王は戦勝を祝い死刑囚の恩赦を決定し、4人の死刑囚 (a,b,c,d) のうち1人が恩赦される。ただし、死刑囚たちには誰が恩赦されるかは伝えられていない。死刑囚 a は「自分以外の b,c,d のうち少なくとも1名は処刑される。b,c,d から処刑される囚人の名を一人教えてくれと」看守にたのんだ。看守は d が処刑されると a に教えた。看守が d が処刑されると a に教える事象を X とおく。また a が恩赦される事象を A とする。事象 X のもと a が助かる確率  $P(A|X) = \frac{1}{\boxed{(1)}}$  を求めなさい。なお死刑囚 a は、a,b,c のうち1人が助かるので、自分が助かる確率は  $\frac{1}{3}$  と考えている。

問2 (ベイズの定理) 王は戦勝を祝い死刑囚の恩赦を決定し、n 人 ( $n = 3, 4, 5, \dots$ ) の死刑囚 ( $a_1, a_2, \dots, a_n$ ) のうち1人が恩赦される。ただし、死刑囚たちには誰が恩赦されるかは伝えられていない。死刑囚  $a_1$  は「自分以外の ( $n-1$ ) 人のうち少なくとも1名は処刑される。 $a_2, a_3, \dots, a_n$  から処刑される囚人の名を一人教えてくれと」看守にたのんだ。看守は  $a_n$  が処刑されると  $a_1$  に教えた。看守が  $a_n$  が処刑されると  $a_1$  に教える事象を X とおく。また  $a_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) が恩赦される事象を  $A_j$  とする。  $P(X|A_1) = \frac{1}{n - \boxed{(2)}}$ ,  $P(X|A_j) = \frac{1}{n - \boxed{(3)}}$  ( $2 \leq j \leq n-1$ ),  $P(X|A_n) = 0$ , および  $P(A_1|X) = \frac{\boxed{(4)}}{n}$  になる。

①

問1. bが恩赦される事象 B  
 c " " C とする.  
 d " " D とする.

$$P(A) = P(B) = P(C) = P(D) = \frac{1}{4}$$

$$P(X|A) = \frac{1}{3}$$

$$P(X|B) = P(X|C) = \frac{1}{2}$$

$$P(X|D) = 0$$

「イズ」の定理により、

$$P(A|X) = \frac{P(X|A)P(A)}{P(X)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{4}$$

$$P(X) = P(X|A)P(A) + P(X|B)P(B) + P(X|C)P(C) + P(X|D)P(D)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + 0$$

$$= \frac{1}{3}$$

$$\boxed{(1)} = 4$$

問2.  $P(A_{\bar{j}}) = \frac{1}{n} \quad (1 \leq j \leq n)$ .

$P(X|A_1) = a_2, a_3, \dots, a_n$  の  $(n-1)$  人が  $a_m$  をえらび確率は,

$$P(X|A_1) = \frac{1}{n-1}$$

$P(X|A_{\bar{j}}) \quad (2 \leq j \leq n-1) = a_2, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots, a_n$  の  $(n-2)$  人が  $a_m$  をえらび.

$$P(X|A_{\bar{j}}) = \frac{1}{n-2} \quad (2 \leq j \leq n-1)$$

$P(X|A_n)$

バネの定理から,

$$P(A_1|X) = \frac{P(X|A_1)P(A_1)}{P(X)} = \frac{\frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{n}}{\frac{1}{n-1}} = \frac{1}{n}$$

$$P(X) = \sum_{\bar{j}=1}^n P(X|A_{\bar{j}})P(A_{\bar{j}})$$

$$= \left( \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} \times (n-2) + 0 \right) \frac{1}{n} = \frac{1}{n-1}$$

$$\boxed{(2)} = 1, \quad \boxed{(3)} = 2, \quad \boxed{(4)} = 1$$