微積分解法 2016 レポート 9回目.

問.1

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1+x^2)y^3}{(y^2-1)x^3}$$ を解け、 $(x>0)$

$$x^a + y^a = 2\log\left(c\frac{x}{y}\right).$$

$$a = \boxed{(1)}$$

問2.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x^3y - y^4}{x^4 - 2xy^3}$$

$$x^b + y^b = Cxy$$

ヒント

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

$y = u \cdot x$ とおいて、変数分離して、

$$\frac{du}{dx} = \frac{f(u)-u}{x}$$

2

$\boxed{(1)} = -2$

$\boxed{(2)} = 3$.

問1,

$$\frac{y^2-1}{y^3}\frac{dy}{dx} = \frac{1+x^2}{x^3}$$

$$\int\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{y^3}\right)dy = \int\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x}\right)dx$$

$$\log y + \frac{1}{2}y^{-2} = -\frac{1}{2}x^{-2}+\log x + C$$

$$\log\left(e^C\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{2}(x^{-2}+y^{-2})$$

e^Cを新たに C とかけば

$$\underline{x^{-2}+y^{-2} = 2\log\left(C\frac{x}{y}\right)}$$

問2.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^4}{1-2\left(\frac{y}{x}\right)^3} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

ただし $f(u) = \dfrac{2u-u^4}{1-2u^3}$.

$y = u \cdot x$ とおく.

$$\frac{du}{dx} = \frac{f(u)-u}{x} = \frac{u^4+u}{1-2u^3} \cdot \frac{1}{x}$$

両辺を積分して、

$$\int \frac{1-2u^3}{u(u^3+1)}\,du = \int \frac{1}{x}\,dx \quad \cdots (☆)$$

さて、

$$\frac{1-2u^3}{u(u^3+1)} = \frac{1-2u^3}{u(u+1)(u^2-u+1)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u+1} + \frac{Cu+D}{u^2-u+1}$$

通分して

$$\begin{aligned}1-2u^3 = A(u+1)(u^2-u+1) + Bu(u^2-u+1)\\ + (Cu+D)u(u+1) \quad \cdots (☆☆)\end{aligned}$$

(☆) で $u=0$ とおく.

$$1 = A + 0 \qquad \therefore\ A = 1$$

(☆) で $u=-1$ とおく.

$$3 = B(-1)(1+1+1) \qquad \therefore\ B = -1$$

(☆☆) の u^3 の係数は、

$$-2 = (A+B+C) \qquad \therefore\ C = -2$$

(☆☆) の u^2 の係数は、

$$0 = -B + C + D \qquad \therefore \; D = 1$$

まとめて

$$\frac{1-2u^3}{u(u^3+1)} = \frac{1}{u} - \frac{1}{u+1} + \frac{-2u+1}{u^2-u+1}$$

$$\int \frac{1-2u^3}{u(u^3+1)}\,du = \log u - \log(u+1) - \log(u^2-u+1) + C$$

よって 方程式 (☆) は、

$$\log x = \log u - \log(u+1) - \log(u^2-u+1) + C$$

$$x = \frac{u}{(u+1)(u^2-u+1)}e^C = \frac{u}{u^3+1}e^C$$

$$x^3 + y^3 = xy\,e^C$$

e^C を新たに C とおけば、

$$\underline{x^3 + y^3 = Cxy}$$