微積分解法2016 レポート8回目

問.

$$Q(x) = \frac{1}{x^3+1}$$

$Q(x)$の部分分数展開は.

$$Q(x) = \frac{1}{\boxed{(1)}}\left(\frac{1}{x+1} + \frac{-x+2}{x^2-x+1}\right).$$

よって原始関数は、

$$\int Q(x)dx$$

$$= \frac{1}{3}\log\frac{|x+1|}{\sqrt{x^2-x+1}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{Arctan}\,\frac{\boxed{(2)}x-1}{\sqrt{3}}.$$

有理関数の原始関数は
初等関数で書ける.

$\boxed{(1)} = 3$

$\boxed{(2)} = 2$.

部分分数展開は、

$$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)=(x+1)\left\{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right\}$$

であることから、

$$Q(x)=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

両辺に $(x+1)\left\{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right\}$ をかけると、

$$1=A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1).$$

$x=-1$ を代入すると、

$$1=A\cdot 3 \qquad \therefore \qquad A=\frac{1}{3}$$

$x=0$ を代入すると、

$$1=A+C \qquad \therefore \qquad C=\frac{2}{3}.$$

x^2の係数を比較すると、

$$0=A+B \qquad \therefore \qquad B=-\frac{1}{3}$$

まとめて、

$$\frac{1}{x^3+1}=\frac{1}{3}\frac{1}{x+1}-\frac{1}{3}\frac{x-2}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$\cdot\ \frac{x-2}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \frac{x-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \frac{(x-\frac{1}{2})}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} - \frac{3}{2}\frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$$

さて.

$$\int\frac{(x-\frac{1}{2})}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dx = \frac{1}{2}\log\left\{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}\right\} = \log\sqrt{x^2-x+1}$$

$$\int\frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \int\frac{\frac{4}{3}}{\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2+1}$$

$$= \frac{4}{3}\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(2x-1)\right)\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(2x-1)\right)$$

まとめて.

$$\int Q(x)\,dx = \int\left(\frac{1}{3}\frac{1}{x+1} - \frac{1}{3}\frac{(x-\frac{1}{2})}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} + \frac{1}{2}\frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\right)dx$$

$$= \frac{1}{3}\log|x+1| - \frac{1}{3}\log\sqrt{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(2x-1)\right)$$

$$= \frac{1}{3}\log\frac{|x+1|}{\sqrt{x^2-x+1}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(2x-1)\right)$$