

補充問題

①

問 次の有理関数の部分分数展開と原始関数を求めよ。

$$(1) \frac{1}{x(x^2+1)}$$

$$(2) \frac{1}{(x-a)(x-b)} \quad (a \neq b)$$

$$(3) \frac{1}{x(x^2-1)}$$

$$(4) \frac{1}{x^2(x^2+1)}$$

$$(5) \frac{1}{x^2(x^2+1)^2}$$

$$(6) \frac{1}{x(x+1)^3}$$

$$(7) \frac{x^3}{(x-1)^2(x^2+1)}$$

補充問題として、授業中に
某問題集の問題と答を写したの
ですが、念のためチェックしてみたところ、
間違っているようです。修正版を
アップしておきます。失礼。

(注) 大学レベルだと教科書にミスがあるのは
よくあることです。

(1) $\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}$

$\int \frac{dx}{x(x^2+1)} = \log|x| - \frac{1}{2} \log(x^2+1) + C$

(2) $\frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{1}{a-b} \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b} \right)$

$\int \frac{dx}{(x-a)(x-b)} = \frac{1}{a-b} \log \left| \frac{x-a}{x-b} \right| + C$

(3) $\frac{1}{x(x^2-1)} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} \right)$

$\int \frac{dx}{x(x^2-1)} = \frac{1}{2} \log|x^2-1| - \log|x| + C$

(4) $\frac{1}{x^2(x^2+1)} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1}$

$\int \frac{dx}{x^2(x^2+1)} = -\frac{1}{x} - \text{Arctan}(x) + C$

(5) $\frac{1}{x^2(x^2+1)^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{(x^2+1)^2}$

$\int \frac{dx}{x^2(x^2+1)^2} = -\frac{1}{x} - \frac{1}{2} \frac{x}{x^2+1} - \frac{3}{2} \text{Arctan}x + C$

(t-t) $\int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx = \frac{1}{2} \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2} \text{Arctan}x + C$

$\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx = -\frac{1}{2} \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2} \text{Arctan}x + C$

$$(6) \cdot \frac{1}{x(x+1)^3} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+1)^3}$$

$$\int \frac{dx}{x(x+1)^3} = \log \left| \frac{x}{x+1} \right| + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2(x+1)^2} + C.$$

$$(7) \cdot \frac{x^3}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{x^2+1}$$

$$\int \frac{x^3}{(x-1)^2(x^2+1)} dx = -\frac{1}{2(x-1)} + \log |x-1| + \frac{1}{2} \operatorname{Arctan} x + C.$$