補充問題　テイラー展開（マクローリン展開）

問、次の関数のマクローリン展開を求めよ

- $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$
- $\cos^2 x$

・e^x のマクローリン展開は、$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$

よって

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(-x)^n\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)!} x^{2m+1} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m)!} x^{2m} - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)!} x^{2m+1} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m)!} x^{2m}\right)$$

$$= \underline{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m)!} x^{2m}}$$

・$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$

$\cos x$ のマクローリン展開は、$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$

よって

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}\left(1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}(2x)^{2n}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1+1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n)!}x^{2n}\right)$$

$$= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}$$

問.

$\sqrt{\cos x}$ のマクローリン展開を x^4 の項までもとめよ.

$$\cos x = 1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+\cdots$$

$$\sqrt{1+x} = 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\cdots$$

よって

$$\sqrt{\cos x} = \sqrt{1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+\cdots}$$

$$= 1+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+\cdots\right)$$

$$-\frac{1}{8}\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+\cdots\right)^2+\cdots$$

$$= 1-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{48}x^4+\cdots$$

$$-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}x^4+\cdots\right)$$

$$= 1-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{96}x^4+\cdots$$

問、 $f(x)=\log(1-2x-3x^2)$ のマクローリン展開を x^4 の項までもとめよ.

$$(1-2x-3x^2)=(1+x)(1-3x)$$

$$\log(1-2x-3x^2)=\log(1+x)+\log(1-3x)$$

$\log(1+y)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}y^n$ であるから、

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}(-3x)^n$$

$$=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\cdots$$

$$-3x-\frac{9}{2}x^2-\frac{27}{3}x^3-\frac{81}{4}x^4+\cdots$$

$$=-2x-5x^2-\frac{26}{3}x^3-\frac{41}{2}x^4+\cdots$$