微積分解法2016　10回目レポート

問1.

曲線C : $y = \sin x$ $(0 \leq x \leq 2\pi)$ と

x軸で囲まれた図形をx軸のまわりに

1回転してできる立体の体積 V をもとめよ.

$$V = \boxed{(1)} \cdot \pi^2$$

問2、

サイクロイド

$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta) \\ y = a(1 - \cos\theta) \end{cases} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

の長さL をもとめよ. ただし $a > 0$ とする。

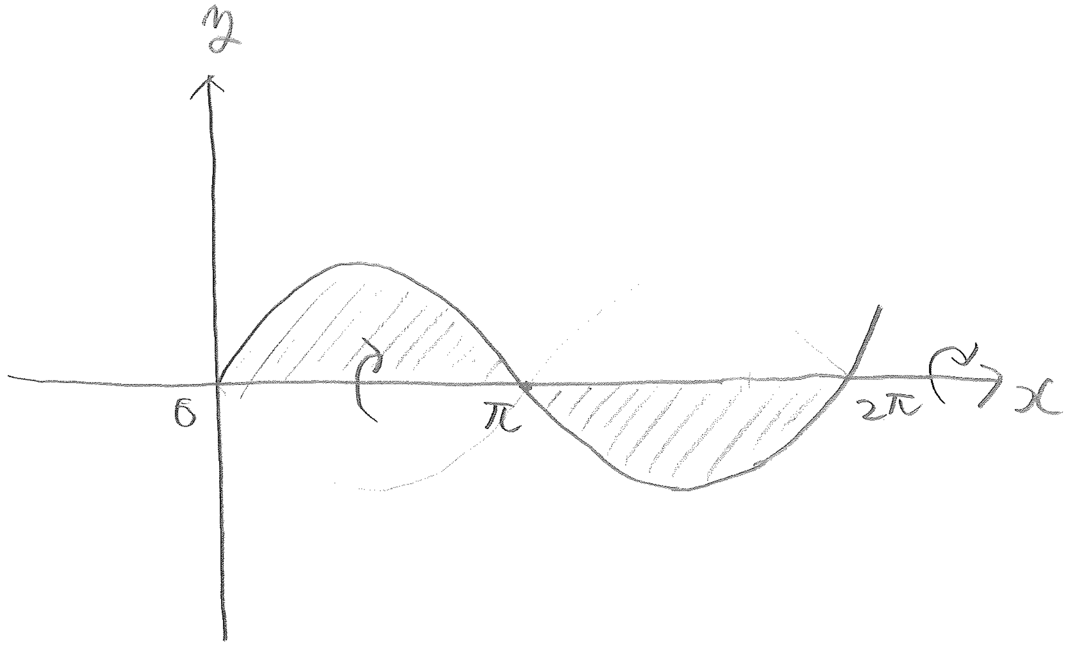
$$L = \boxed{(2)} \cdot a$$

（ヒント： $1 - \cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$ ）

$\boxed{(1)} = 1$

$\boxed{(2)} = 8$

問1.



$$V = \pi \int_0^{2\pi} \sin^2 x \, dx$$

$$= \pi \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)\, dx$$

$$= \pi \left[\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x \right]_0^{2\pi}$$

$$= \pi \times \pi = \underline{\pi^2}$$

問2.

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\theta} = a(1-\cos\theta) \\ \dfrac{dy}{d\theta} = a\sin\theta \end{cases}$$

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2$$

$$= a^2(1-2\cos\theta+\cos^2\theta) + a^2\sin^2\theta$$

$$= 2a^2(1-\cos\theta)$$

$$= 4a^2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

よって

$$L = \int_0^{2\pi} 2a\sin\frac{\theta}{2}\, d\theta$$

$$= 2a\left[-2\cos\frac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi}$$

$$= 2a(2+2) = \underline{8a}$$