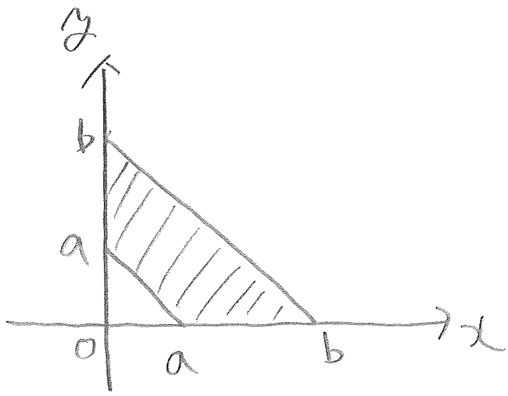
数I 2016 レポート（8回目）

問1.

$$I = \iint_E \exp\left(\frac{x-y}{x+y}\right) dxdy$$

$$E = \{(x,y) \mid a \leq x+y \leq b,\ x,y \geq 0\}$$

$$(0 < a \leq b)$$



を変数変換 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u+u\cdot v \\ u-u\cdot v \end{pmatrix}$ を行うことで

もとめよ.

ヤコビアン $J(u,v) = \boxed{(1)} \times u$

$$I = (e-e^{-1})(b^2-a^2)\frac{1}{\boxed{(2)}}$$

問2.

次の変数変換のヤコビアンをもとめなさい.

ただし、ヤコビアンは.

$$J(r,\theta,\varphi)=\begin{vmatrix} x_r & x_\theta & x_\varphi \\ y_r & y_\theta & y_\varphi \\ z_r & z_\theta & z_\varphi \end{vmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$J(r,\theta,\varphi)=r^a\sin^b\theta$$

$a=\boxed{(13)}$

$b=\boxed{(14)}$

$\boxed{(1)} = -2$

$\boxed{(2)} = 4$

$\boxed{(3)} = 2$

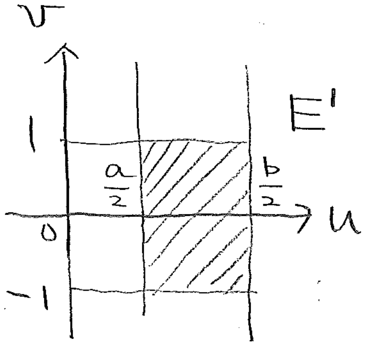
$\boxed{(4)} = 1$

問:

変数変換 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u+uv \\ u-uv \end{pmatrix}$ により、Dは、

$$E' = \{(u,v) \mid a \leq 2u \leq b,\ u+uv \geq 0,\ u-uv \geq 0\}$$
$$= \{(u,v) \mid \tfrac{a}{2} \leq u < \tfrac{b}{2},\ -1 \leq v \leq 1\}$$

に写る。



ヤコビアンは

$$J(u,v) = \det\begin{pmatrix} 1+v & u \\ 1-v & -u \end{pmatrix} = -2u.$$

変数変換公式により、

$$I = \iint_{E'} \exp\left(\frac{u+uv-u+uv}{u+uv+u-uv}\right)|-2u|\,du\,dv$$

$$= \iint_{E'} \exp(v)\,2u\,du\,dv$$

変数分離して、

$$I = \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{b}{2}} 2u\,du \times \int_{-1}^{1} \exp(v)\,dv$$

$$= \left[u^2\right]_{u=\frac{a}{2}}^{u=\frac{b}{2}} \times \left[e^v\right]_{v=-1}^{v=1}$$

$$= \frac{1}{4}(b^2-a^2)\times(e^1-e^{-1}).$$

問2.

$$J(r,\theta,\varphi)=\begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{3+1}\cos\theta\begin{vmatrix} r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{3+2}(-r\sin\theta)\begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \end{vmatrix}$$

$$= r^2\cos^2\theta\sin\theta(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)$$

$$+ r^2\sin^3\theta(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)$$

$$= r^2\sin\theta(\cos^2\theta+\sin^2\theta)$$

$$= \underline{r^2\sin\theta}$$