数学I 2016　レポート（4回目）

問1.　$f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x+y}}$.

テイラーの定理による展開式を2次のオーダまでもとめる．ただし中心は(0,0)とする．

$$f(x,y)=1-\frac{1}{\boxed{(1)}}(x+y)+\frac{3}{\boxed{(2)}}(x^2+2xy+y^2)+\cdots$$

問2.　$z=f(x,y)=2x^2+y^2-x-y=0$.

臨界点 $f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ は唯一つ存在するが、この点におけるヘシアン $H(a,b)$ の値をもとめよ．

$$H(a,b)=\begin{vmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{yx}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{vmatrix}=\boxed{(3)}.$$

点 (a,b) が極大なら0，極小なら1

あん点なら2を $\boxed{(4)}$ に

$\boxed{(1)} = 2$ $\boxed{(2)} = 8$

$\boxed{(3)} = 8$ $\boxed{(4)} = 1$

問1.

$f(x,y)$ の偏微分は,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{2}(1+x+y)^{-\frac{3}{2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{2}(1+x+y)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{3}{4}(1+x+y)^{-\frac{5}{2}}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{3}{4}(1+x+y)^{-\frac{5}{2}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{3}{4}(1+x+y)^{-\frac{5}{2}}$$

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x-0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y-0) \\ &\quad + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)(x-0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)(x-0)(y-0) \right. \\ &\qquad \left. + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)(y-0)^2\right) + \cdots \\ &= 1 - \frac{1}{2}(x+y) + \frac{3}{8}(x^2+2xy+y^2) + \cdots \end{aligned}$$

問2.

臨界点は、

$$f_x = 4x - 1 = 0$$
$$f_y = 2y - 1 = 0$$

を解いて　$(x, y) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$

$f_{xx} = 4,\ f_{xy} = 0$

$f_{yx} = 0,\ f_{yy} = 2$　であるから.

ヘシアンは.

$$H\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 > 0$$

$f_{xx}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) = 4 > 0$　なので、

極値判定定理により、極小.