数学I 2016 レポート 10回目.

問1. 次の積分を求めなさい.

$$I = \iiint_D xyz \, dxdydz$$

$$D = \{(x,y,z) \mid 1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4, \; x,y,z \geq 0\}$$

$$I = \frac{\boxed{(1)}}{\boxed{(2)}} \longleftarrow \text{既約分数}$$

問2. 次の積分を求めなさい.

$$I = \iiint_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2-z^2}{1+x^2+y^2+z^2}} \, z \, dxdydz$$

$$D = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1, \; x,y,z \geq 0\}$$

(1)

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}} \, r^3 dr = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{\boxed{(3)}}$$

$\boxed{\text{ヒント}}$

$$\sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}} \, r^3 = \frac{r^3-r^5}{\sqrt{1-r^4}} = \frac{1}{2}\frac{s-s^2}{\sqrt{1-s^2}}\frac{ds}{dr} \quad (s=r^2)$$

(2)

$$I = \frac{\pi}{\boxed{(4)}}\left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{\boxed{(3)}}\right).$$

$\boxed{(1)} = 21$

$\boxed{(2)} = 16$

$\boxed{(3)} = 8$

$\boxed{(4)} = 4$

（解答）

問1、 極座標変換を行う.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\varphi\cos\theta \\ r\sin\varphi\sin\theta \\ r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

ヤコビアン $J(r,\varphi,\theta) = r^2\sin\varphi$

変数変換公式により、

$$I = \iiint_E r^3\sin^2\varphi\cos\varphi\sin\theta\cos\theta\,|r^2\sin\varphi|\,dr\,d\varphi\,d\theta$$

$$= \iiint_E r^5\sin^3\varphi\cos\varphi\sin\theta\cos\theta\;dr\,d\varphi\,d\theta$$

$E = \{(r,\varphi,\theta) \mid 1 \le r \le 2,\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\}$

変数分離して、

$$I = \int_1^2 r^5\,dr \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi\cdot\cos\varphi\,d\varphi \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta\,d\theta$$

$$= \left[\frac{1}{6}r^6\right]_{r=1}^{r=2}\left[\frac{1}{4}\sin^4\varphi\right]_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{2}\sin^2\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{6}(64-1)\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2} = \frac{63}{48} = \frac{3\times3\times7}{3\times2\times2\times2\times2}$$

$$= \frac{21}{16}$$

極座標変換

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\varphi\cos\theta \\ r\sin\varphi\sin\theta \\ r\cos\varphi \end{pmatrix}$$ をほどこす。

ヤコビアン $J(r,\varphi,\theta)=r^2\sin\varphi$ であるから、
変数変換公式により、

$$I=\iiint_{D'}\sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}\,r\cos\varphi\, r^2\sin\varphi\, dr\,d\varphi\,d\theta$$

ただし $D'=\{(r,\varphi,\theta)\mid 0\le r\le 1, 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}, 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\}$

変数分離して、

$$I=\int_0^1\sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}\,r^3\,dr\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}1\,d\theta$$

さて、

・$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\varphi\,d\varphi=\left[-\frac{1}{4}\cos 2\varphi\right]_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}.$$

・$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}1\,d\theta=\frac{\pi}{2}$

$$J=\int_0^1\sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}\,r^3\,dr$$

$$=\int_0^1\frac{r^3-r^5}{\sqrt{1-r^4}}\,dr$$

$s=r^2$ とすると、 $ds=2r\,dr$

$$J=\int_0^1 \frac{1}{2}\,\frac{s-s^2}{\sqrt{1-s^2}}\,ds$$

$s=\sin\theta$ とすると、 $\left(\begin{array}{l} s: 0\mapsto 1 \\ \theta: 0\mapsto \pi/2 \end{array}\right.$ $ds=\cos\theta\, d\theta$

$$J=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\theta-\sin^2\theta}{\cos\theta}\cos\theta\, d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta-\sin^2\theta)\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin\theta-\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)\right)d\theta$$

$$=\left[-\frac{1}{2}\cos\theta-\frac{1}{4}\left(\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{1}{8}0=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{8}$$

まとめて、

$$I=\left(\frac{1}{2}-\frac{\pi}{8}\right)\times\frac{\pi}{2}\times\frac{1}{2}=\underline{\frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{2}-\frac{\pi}{8}\right)}$$