数学I レポート 2016 (1回目)

問1. 次の極限をもとめなさい.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \boxed{(1)}$$

問2. 次の関数は原点(0,0)で連続だろうか.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 1 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

連続ならば 1を,

不連続ならば 2を $\boxed{(2)}$ に入力しなさい。

問3. 次の関数の偏微分をもとめなさい。

$$f(x,y) = \log(x^2+y^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \boxed{(3)} \times \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \boxed{(4)} \times \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$\boxed{(1)} = 1$

$\boxed{(2)} = 2$

$\boxed{(3)} = 2$

$\boxed{(4)} = 2$

(解答例)

問1. 極座標 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$ を用いる.

$\sqrt{x^2+y^2} = r$ であるから,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{\sin r}{r} = 1.$$

問2. 極座標 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$ で考える.

$(x,y) \neq (0,0)$ で

$$f(x,y) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

$$= \frac{r^4\cos^2\theta\sin^2\theta}{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)} = r^2\cos^2\theta\sin^2\theta$$

$-1 \leq \cos\theta \leq 1$, $-1 \leq \sin\theta \leq 1$ であるから,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0} r^2\cos^2\theta\sin^2\theta = 0$$

よって $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 \neq 1 = f(0,0)$

つまり、原点(0,0)で不連続.

問3.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2(x^2+y^2)-2x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$$